



**EURASIAN
NATIONAL
UNIVERSITY**

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

Республикалық ғылыми-практикалық конференция

«Математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері

Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында»

3-5 мамыр 2018 жыл, Астана, Қазақстан

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканская научно-практическая конференция

«Современные проблемы математического и компьютерного моделирования

в условиях развития цифровой индустрии Казахстана»

3-5 мая 2018 года, Астана, Казахстан

ӘОЖ 004+519+316

КБЖ 22

М 49

В подготовке Сборника принимали участие:

Адамов А.А., Нугманова Г.Н., Сергибаев Р.А., Байдавлетов А.Т.

Математикалық және компьютерлік моделдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында: Республикалық ғылыми-практикалық конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ = Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-практической конференции. Қазақша, орысша, ағылшынша. – Астана, 2018, 161 б.

ISBN 978-601-337-014-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік моделдеу, математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методики преподавания математики.

Тексты докладов представлены в авторской редакции

ISBN 978-601-337-014-9

ӘОЖ 004+519+316

КБЖ 22.1

A NOTE ON PRACTICAL OUTPUT TRACKING FOR A CLASS OF UNCERTAIN HIGH ORDER NONLINEAR SYSTEMS

Keylan Alimhan, Abilmazhin A. Adamov and Gaziza Batayeva
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan

Abstract

This paper considers the problem of global practical tracking via output feedback control for a class of more general uncertain high-order nonlinear systems. By introducing sign function and necessarily modifying the homogeneous domination approach and under a weaker growth condition, this paper proposes a new control scheme to achieve the global practical tracking. It is shown that the designed controller guarantees that the state of the resulting closed-loop system is globally bounded and the tracking error converges to a prescribed arbitrarily small neighborhood of the origin after a finite time.

Keywords. output feedback control, practical output tracking, homogeneous domination, nonlinear system

1. Introduction

The problem of global output tracking control of nonlinear systems is one of the most important and challenging problems in the field of nonlinear control and lots of efforts have been made during the last decades, see [1-12], as well as the references therein. With the help of the nonlinear output regulator theory [3], [4] and the method of adding a power integrator [13-15], series of research results have been obtained [5-7]. For details, in [8], practical output tracking via smooth state feedback for nonlinear systems was considered. Compared with state feedback control, the theory of output control developed slower, because there is no general and effective method to design a nonlinear observer.

This paper deals with the problem of global practical output tracking by output feedback for a class of more general high-order nonlinear systems described by

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \theta_i x_{i+1}^{p_i} + \phi_i(t, x, u), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= \theta_n u + \phi_n(t, x, u), \\ y &= \theta_0 x_1 - y_r\end{aligned}\tag{1}$$

where $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ and $u \in R$ are the system state and the control input, respectively. For $i = 1, \dots, n$, $\phi_i(t, x, u)$ are unknown continuous functions and $p_i \in R_{\text{odd}}^{\geq 1} := \{p/q \in [0, \infty) : p \text{ and } q \text{ are odd integers, } p \geq q\}$ ($i = 1, \dots, n-1$) are said to be the high orders of the system, with p_n obviously equal to one (which is not a limitation since we can easily set $v := u^{p_n}$ in the case of non-unity p_n). The parameters θ_i , $i = 0, 1, \dots, n$ are unknown constants and y_r is a reference signal to be tracked. Although in the usual tracking problem the reference signal $y_r(t)$, $t \in [0, \infty)$ as well as its derivatives are assumed to be known, but in our problem only the error $y = \theta_0 x_1 - y_r$ between the output $\theta_0 x_1$ and the reference signal y_r are assumed to be measurable. Hence only y is allowed to use in the design of the control. There are two reasons to restrict the only measurement to be the error signal. One, in some practice control applications, is inevitable that the error signal is the one to be directly measured. For example, in a missile guidance system, instead of measuring the absolute position of the moving target, that is signal y_r , the onboard radar keeps measuring the distance/error between the missile and the target [1]. The other one is assuming only error signal also makes the actuator design simple, as the controller does not depend on the signal to be tracked explicitly. In this way, the controller is more adaptive to different reference signals [2].

Recently, in [9-12] and [2], the practical output feedback tracking problem was also investigated for a class of nonlinear systems with higher-order growing unmeasurable states, extending the results on stabilization in [16-19].

In [9-12] and [2], the following condition on the uncertain term $\phi_i(\cdot)$ is assumed:

$$|\phi_i(t, z, u)| \leq C \left(|x_1|^{(r_1+\tau)/r_1} + \dots + |x_i|^{(r_i+\tau)/r_i} \right) + C \quad (2)$$

where $C > 0, \tau > 0$ or $\tau \geq -1/\sum_{l=1}^n p_l \dots p_{l-1}$ are constants and r_i 's are defined as $r_1 = 1, r_{i+1}p_i = r_i + \tau > 0, i = 1, \dots, n$. Nevertheless, from both practical and theoretical points of view, it is still somewhat restrictive to require system (1) satisfying such restriction. To illustrate the limitation, let us consider the following simple system:

$$\dot{x}_1 = \theta_1 x_2 + x_1^{3/5}, \quad \dot{x}_2 = \theta_2 u, \quad y = \theta_0 x_1 - y_r, \quad \theta_i \in [1, 2], \quad i = 0, 1, 2$$

where $p_1 = p_2 = 1, \phi_1 = x_1^{3/5}$ and $\phi_2 = 0$. For the simple system, it is easily verified that the works [9-12] and [2] cannot lead to any output feedback tracking controller because of the presence of low-order term $x_1^{3/5}$ dissatisfied the growth condition.

In this paper, by introducing a combined homogeneous domination and sign function approach, we shall solve the above problems.

2. Mathematical Preliminaries

We collect the definition of homogeneous function and several useful lemmas.

First, we recall some important definitions regarding to homogeneous systems (For more details, see, e.g., [20], [21], [23] and [22]). Now, let $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ be a fixed coordinate, and $s > 0, r_i > 0 (i = 1, \dots, n)$ be real numbers. Then:

(i) A *dilation* $\Delta_s(x)$ is a mapping defined by

$$\Delta_s(x) = (s^{r_1} x_1, \dots, s^{r_n} x_n), \quad \forall s > 0$$

where r_i are called *the weights of the coordinate*. For simplicity of notation, the dilation weight is denoted by $\Delta = (r_1, \dots, r_n)$.

(ii) A function $V \in C(R^n, R)$ is said to be *homogeneous of degree τ* if there is a real number $\tau \in R$ such that

$$V(\Delta_s(x)) = s^\tau V(x), \quad \forall x \in R^n - \{0\}.$$

(iii) A vector field $f \in C(R^n, R^n)$ is said to be *homogeneous of degree τ* if there is a real number $\tau \in R$ such that for $i = 1, \dots, n$

$$f_i(\Delta_s(x)) = s^{\tau+r_i} f_i(x), \quad \forall x \in R^n - \{0\}.$$

(iv) A *homogeneous p -norm* is defined as

$$\|x\|_{\Delta, p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p/r_i} \right)^{1/p}, \quad \forall x \in R^n, p \geq 1.$$

For the simplicity, write $\|x\|_\Delta$ for $\|x\|_{\Delta, 2}$.

Next, we introduce several technical lemmas which will play an important role and be frequently used in the later control design.

Lemma1[21]. Given a dilation weight $\Delta = (r_1, \dots, r_n)$, suppose $V_1(x)$ and $V_2(x)$ are homogeneous of degree τ_1 and τ_2 , respectively. Then, $V_1(x)V_2(x)$ is also homogeneous with respect to the same dilation Δ . Moreover, the homogeneous degree of $V_1(x)V_2(x)$ is $\tau_1 + \tau_2$.

Lemma2[21]. Suppose $V : R^n \rightarrow R$ is a homogeneous function of degree τ with respect to the dilation weight Δ . Then, the following holds:

- (i) $\partial V / \partial x_i$ is also homogeneous of degree $\tau - r_i$ with r_i being the homogeneous weight of x_i .
- (ii) There is a constant $\sigma > 0$ such that $V(x) \leq \sigma \|x\|_\Delta^\tau$. Moreover, if $V(x)$ is positive-definite, there is a constant $\rho > 0$ such that $\rho \|x\|_\Delta^\tau \leq V(x)$.

Now, we introduce several technical lemmas which will play an important role and be frequently used in the later control design.

Lemma3[5]. For any real numbers $x \geq 0$, $y > 0$ and $m \geq 1$, the following inequality holds:

$$x \leq y + (x/m)^m ((m-1)/y)^{m-1}.$$

Lemma4[24]. For all $x, y \in \mathbb{R}$ and a constant $p \geq 1$ the following inequalities holds:

$$(i) |x+y|^p \leq 2^{p-1} |x^p + y^p|, (|x|+|y|)^{1/p} \leq |x|^{1/p} + |y|^{1/p} \leq 2^{(p-1)/p} (|x|+|y|)^{1/p}$$

If $p \in R_{\text{odd}}^{\geq 1}$, then

$$(ii) |x-y|^p \leq 2^{p-1} |x^p - y^p| \text{ and } |x^{1/p} - y^{1/p}| \leq 2^{(p-1)/p} |x-y|^{1/p}.$$

Lemma5[24]. Let c, d be positive constants. Then, for any real-valued function $\gamma(x, y) > 0$, the following inequality holds:

$$|x|^c |y|^d \leq \frac{c}{c+d} \gamma(x, y) |x|^{c+d} + \frac{d}{c+d} \gamma^{-c/d}(x, y) |y|^{c+d}.$$

Lemma6[25]. For $x, y \in \mathbb{R}$ and $0 < p \leq 1$ the following inequality holds:

$$(|x|+|y|)^p \leq |x|^p + |y|^p.$$

When $p = a/b \leq 1$, where $a > 0$ and $b > 0$ are odd integers

$$|x^p + y^p| \leq 2^{1-p} |x+y|^p.$$

Lemma7[26]. If $p = a/b \in R_{\text{odd}}^{\geq 1}$ with $a \geq b \geq 1$ being some real numbers, then for any $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x^p - y^p| \leq 2^{1-1/b} |\text{sgn}(x)|x|^a - \text{sgn}(y)|y|^a|^{1/b}.$$

Lemma8[8]. If $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \leq b$) is monotone continuous and satisfies $f(a) = 0$, then

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq |f(b)| \cdot |b-a|.$$

3. Main Results

This paper deals with the practical output tracking problem by output feedback for nonlinear systems (1). Here, we give a precise definition of our practical tracking problem [9], [11].

The problem of global practical tracking by an output feedback: Consider system (1) and assume that the reference signal $y_r(t)$ is a time-varying C^1 -bounded function on $[0, \infty)$. For any given $\varepsilon > 0$, design an output controller having the following structure

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \alpha(\zeta, y), & \zeta(0) \in \mathbb{R}^{n-1} \\ u = \beta(\zeta, y), \end{cases} \quad (3)$$

where α, β are some smooth functions, such that

- i) All the state $[x(t), \zeta(t)] \in \mathbb{R}^{2n-1}$ of the closed-loop system (1) with output controller (3) is well-defined on $[0, +\infty)$ and globally bounded.
- ii) For any initial state $[x(0), \zeta(0)]$, there is a finite time $T := T(\varepsilon, x(0), \zeta(0)) > 0$, such that

$$|y(t)| = |x_1(t) - y_r(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq T > 0. \quad (4)$$

In order to solve the global practical output tracking problem, we made the following assumptions:

Assumption1. For $i = 1, \dots, n$, there are constants C_1, C_2 and

$\tau \geq -1/\sum_{i=1}^n p_1 \cdots p_{l-1}$ such that

$$|\phi_l(t, x, u)| \leq C_1 (|x_1|^{(r_1+\tau)/r_1} + \cdots + |x_l|^{(r_l+\tau)/r_l}) + C_2 \quad (5)$$

where $r_1 = 1$, $r_{i+1} = (r_i + \tau)/p_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ and $\sum_{i=1}^n p_1 \cdots p_{i-1} = 1$ for the case of $l = 1$.

Remark1. Assumption1, which gives the nonlinear growth condition on the system drift terms, encompasses the assumptions in existing results [9-12] and [2]. Specifically, when $\tau \geq 0$, it reduces to Assumptions in [9-10] and [1-2]. When τ is some ratios of odd integers in $\tau \in [-1/\sum_{i=1}^n p_1 \cdots p_{i-1}, 0]$, it encompasses the condition used in [11].

Assumption2. The reference signal $y_r(t)$ is continuously differentiable. Moreover, there is a known constant $D > 0$, such that

$$|y_r(t)| + |\dot{y}_r(t)| \leq D, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (6)$$

Assumption3. For $i = 0, 1, \dots, n$, there exist positive constants Γ_i , H_i such that

$$\Gamma_i \leq \theta_i \leq H_i. \quad (7)$$

Now, we state the main result of this paper as follows:

Theorem1. Under assumptions1-3 on system (1), the global practical output tracking problem stated above is solvable by output controller of the form (3).

Proof. With the help of these Lemmas1-8 and [27], we can prove of the main results. First, we introduce the following change of coordinates

$$\mathcal{Z}_1 = \theta_0 x_1, \mathcal{Z}_i = \theta_0^{1/(p_0 \cdots p_{i-1})} \theta_1^{1/(p_1 \cdots p_{i-1})} \cdots \theta_{i-1}^{1/p_{i-1}} x_i, \quad i = 2, \dots, n \quad (8)$$

where $p_0 = 1$, under which system (1) can be written as

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{Z}}_i &= \mathcal{Z}_{i+1}^{p_i} + \varphi_i(t, \mathcal{Z}, u), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\mathcal{Z}}_n &= \theta u + \varphi_n(t, \mathcal{Z}, u) \\ y &= \mathcal{Z}_1 - y_r(t) \end{aligned} \quad (9)$$

where $\varphi_1(t, \mathcal{Z}, u) = \theta_0 \phi_1(t, x, u)$, $\varphi_i(t, \mathcal{Z}, u) = \theta_0^{1/(p_0 \cdots p_{i-1})} \theta_1^{1/(p_1 \cdots p_{i-1})} \cdots \theta_{i-1}^{1/p_{i-1}} \phi_i(t, x, u)$, $i = 2, \dots, n$ and

$\theta = \theta_0^{1/(p_0 \cdots p_{i-1})} \theta_1^{1/(p_1 \cdots p_{i-1})} \cdots \theta_{n-1}^{1/p_{n-1}} \theta_n$. Via Assumption 3, it can be verified that $\varphi_i(t, \mathcal{Z}, u)$ will satisfy Assumption 2 with a new growth rate $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$. That is

$$|\varphi_i(t, \mathcal{Z}, u)| \leq \tilde{C}_1 \left(|\mathcal{Z}_1|^{(r_1+\tau)/r_1} + \cdots + |\mathcal{Z}_i|^{(r_i+\tau)/r_i} \right) + \tilde{C}_2, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Due to remaining of the prove is very similar to [12] and pages limit, so omitted here.

4. Conclusions

In this paper, an output feedback tracking controller for a class of high-order uncertain nonlinear systems was presented under weaker condition. It was shown that the global practical tracking problem is solvable using the homogenous observer and controller, which can be explicitly constructed. First, we designed an output feedback controller for the nominal system without the perturbing nonlinearities. Then, we utilized the homogeneous domination approach by introducing an adjustable scaling gain into the output feedback controller obtained for the nominal system. Further, it was also shown that an appropriate choice of gain will enable us to globally track for a class of uncertain nonlinear systems in finite time. Finally, the proposed approach can also widen the applicability to a broader class of systems.

References

- [1] Q. Gong and C. Qian, C. ‘Global practical output regulation of a class of nonlinear systems by output feedback’, *Proc. the 44th IEEE conference on decision and control, and the European control conference*, Seville, Spain, pp. 7278-7283, 2005.
- [2] J. Zhai and S. Fei, ‘Global practical tracking control for a class of uncertain nonlinear systems’, *IET Control Theory and Applications*, vol 5, Issue 11, pp. 1343 – 1351, 2011.
- [3] A. Isidori, C.I. Byrnes, “Output regulation of nonlinear system”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35 ,pp. 31-140, 1990.
- [4] C.I. Byrnes, F.D. Psicoli, A. Isidori, *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [5] C.J. Qian, W. Lin, “Practical output tracking of nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47, pp. 21–36, 2002.
- [6] L. Marconi, A. Isidori, “Mixed internal model-based and feedforward control for robust tracking in nonlinear systems”, *Automatica*, 36, pp. 993–1000, 2000.

- [7] W. Lin, R. Pongvuthithum, "Adaptive output tracking of inherently nonlinear systems with nonlinear parameterization", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48, pp. 1737–1749, 2003.
- [8] Z.Y. Sun, Y.G. Liu, "Adaptive practical output tracking control for high-order nonlinear uncertain systems", *Acta Automatica sinica*, 34, pp. 984-989, 2008.
- [9] K. Alimhan, H. Inaba, "Practical output tracking by smooth output compensator for uncertain nonlinear systems with unobservable and undetectable linearization", *Int. J. of Modelling, Identification and Control*, 5, pp.1-13, 2008.
- [10] K. Alimhan, H. Inaba, "Robust practical output tracking by output compensator for a class of uncertain inherently nonlinear systems", *Int. J. of Modelling, Identification and Control*, 4, (2008), pp.304-314.
- [11] W.P. Bi, J.F. Zhang, "Global practical tracking control for high-order nonlinear uncertain systems", *Proc. of the Chinese Control and Decision Conference*, pp.1619-1622, 2010.
- [12] K. Alimhan, N. Otsuka, and O. J. Mamyrbayev, "Global Practical Tracking by Output Feedback for Uncertain Nonlinear Systems Under A Weaker Condition", *International Journal of Mathematical models and Methods in Applied Sciences*, Vol.11, pp.88-93, 2017.
- [13] W. Lin, C.J. Qian, "Adding one power integrator: a tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems", *Systems & Control Letters*, 39, pp.339–351, 2000.
- [14] C.J. Qian, W. Lin, "Non-Lipschitz continuous stabilizers for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization", *Systems & Control Letters*, 42, (2001), pp.185–200.
- [15] C.J. Qian, W. Lin, "A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 46, pp.1061–1079, 2001.
- [16] B. Yang, W. Lin, "Homogeneous observers, iterative design, and global stabilization of high-order nonlinear systems by output feedback", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 49, pp.1069-1080, 2004.
- [17] B. Yang, W. Lin, "Robust output feedback stabilization of uncertain nonlinear systems with uncontrollable and unobservable linearization", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 50, pp.619-630, 2005.
- [18] C. Qian, W. Lin, Recursive observer design, homogeneous approximation, and nonsmooth output feedback stabilization of nonlinear systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 51, 1457-1471, 2006.
- [19] J. Polendo, C. Qian, "A generalized homogeneous domination approach for global stabilization of inherently nonlinear systems via output feedback", *Int. J. of Robust Nonlinear Control*, 17, pp.605–629, 2007.
- [20] M. Kawski, 'Homogeneous stabilizing feedback laws', *Control Theory Adv. Technol.*, Vol. 6, pp. 497-516, 1990.
- [21] H. Hermes, 'Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls', *Differential equations (Colorado Springs, Co, 1989), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 127, pp. 249-260, Dekker, New York, 1991.
- [22] C. Qian, 'A homogeneous domination approach for global output feedback stabilization of a class of nonlinear systems', *Proc. American control conference*, pp.4708-4715, 2005.
- [23] C. Qian and W. Lin, 'Recursive observer design, homogeneous approximation, and nonsmooth output feedback stabilization of nonlinear systems', *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 51, pp. 1457-1471, 2006.
- [24] J. Polendo, C. Qian, "A universal method for robust stabilization of nonlinear systems: unification and extension of smooth and non-smooth approaches", *Proc. of the American Control Conference*, pp.4285-4290, 2006.
- [25] X. Huang, W. Lin and B. Yang, "Finite-time stabilization in the large for uncertain nonlinear systems", *Proc. of the American Control Conference*, pp.1073–1078, 2004.
- [26] X.-H. Zhang and X.-J. Xie, "Global state feedback stabilization of nonlinear systems with high-order and low-order nonlinearities", *Int. J. of Control*, 87, pp.642–652, 2014.
- [27] F.-Z. Gao and Y.-U. Wu, Global stabilisation for a class of more general high-order time-delay nonlinear systems by output feedback, *Int. J. of Control*, Vol.88, No.8, 1540-1553, 2015.

КОМБИНАЦИЯЛЫҚ ЦИФРЛІК ҚҰРЫЛҒЫЛАРДЫ VHDL ТІЛІНДЕ МОДЕЛДЕУ

Абдрахман Б., Жантлесеова Ә. Б., Жармакин Б. Қ.

Л.Н Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

«ҚҒС» ҰК» АҚ, Астана, Қазақстан

E-mail: abdrakhman@mail.ua, acbizh@mail.ru, zbk_60@mail.ru

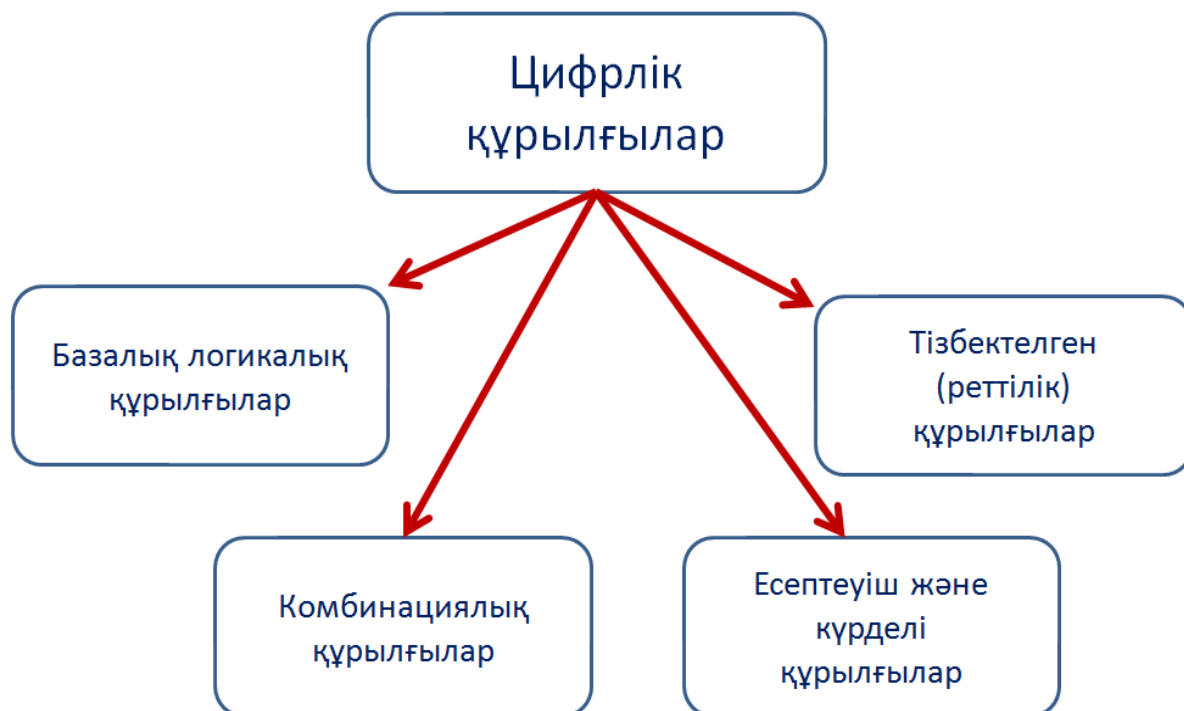
Қазіргі заманғы цифрлік құрылғылар мен жүйелердің элементтік базасы цифрлік интегралды сұлбалар болып табылады. Цифрлік құрылғылар шартты түрде 4 топқа бөлінеді (Сурет 1).

Базалық логика құрылғыларына: инвертор, конъюнктор, дизъюнктор, «Шеффер штрихы» және «Пирс сілтемесі» функциялары мен буфер элементтері жатады.

Тізбектелген құрылғылардың құрамында әртүрлі триггерлер, ал комбинациялық құрылғылардың қатарына: кодер, декодер, мультиплексер мен демультиплексер кіреді.

Цифрлік құрылғылардың ішіндегі ең көпфункционалды күрделі құрылғылар: тура және кері есептеуіштер, регистрлер, компараторлар мен АЛҚ элементтері.

Цифрлік құрылғылар интегральданған сұлба (ИС) ретінде дайындалады. ИС - интегралданған технологиямен дайындалған, жеке корпуста және дискретті (цифрлік) сигналды түрлендіру үшін нақты функцияны орындайтын микроэлектрондық өнім. Логикалық алгебра немесе бульдік алгебра математика аппаратын пайдалана отырып, цифрлік ИС жұмысын және олардың негізінде жасалынған құрылғыларды сипаттайды.

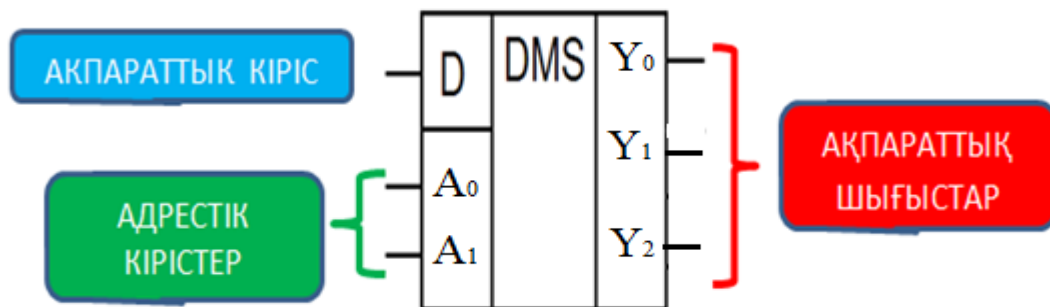


Сурет 1 – Цифрлік құрылғылардың құрамы

Комбинациялық цифрлік құрылғы (КЦҚ) - шығыс сигналдарының мәндері ағымдағы уақыттағы кіріс сигналдарының мәніне ғана тәуелді болатын құрылғы. КЦҚ - ның жады элементтері жоқ, сондықтан шығыс сигналдары бұл құрылғыларда тек қана кіріс сигналдарының шамаларына сәйкес қалыптасады.

Біз бұл мақалада комбинациялық құрылғылардың бірін - демультиплексорді қарастырамыз. Екі адрестік кірісті және үш ақпараттық шығысты демультиплексорды қарастырайық. Жалпы, адрестік кірістер де, ақпараттық шығыстар да, 2 санының қандай – да бір дәрежесі түрінде алынады. Ардуино платформасында демультиплексордің моделін құрастырғанда (авторлардың бұл топтамадағы «Комбинациялық цифрлық құрылғыны АРДУИНО платформасында моделдеу» мақаласын қараңыз)мысал ретінде алынған SN7411 микросұлбасында үш ЖӘНЕ элементі болғандықтан шығыстар саны осылай алынған.

Демультиплексор — бұл бір ақпараттық кірістегі (D) сигналды бірнеше ақпараттық шығыстарға (Y_0 – Y_2) біріне қосатын комбинациялық цифрлық құрылғы. Демультиплексорларды сұлбалардағы шартты белгілері DMX немесе DMS(Сурет 2).



Сурет 2 – Демультиплексордың шартты графикалық белгіленуі

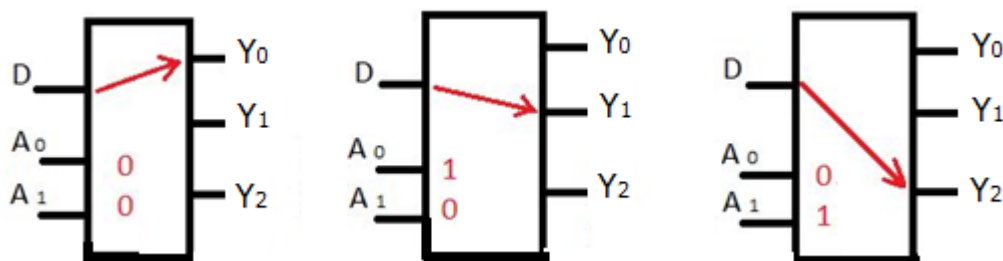
Демультиплексердің жұмыс кестесін құрастырайық. Демультиплексердің жұмысы адрестік кірістердің комбинацияларына байланысты болады. Демультиплексердің кірісіне ақпараттық сигнал (D) логикалық «0» немесе логикалық «1» ретінде келеді. Сондықтан, ақпараттық кірістердің барлық комбинациясын ескерсек, бізде 6 комбинация болуы тиіс. (Кесте 1).

Кесте 1. Демультиплексердің жұмыс кестесі

№	Ақпараттық кіріс	Адрестік кірістер		Ақпараттық шығыстар		
	D	A1	A0	Y2	Y1	Y0
1	0	0	0	*	*	0
2	1	0	0	*	*	1
3	0	0	1	*	0	*
4	1	0	1	*	1	*
5	0	1	0	0	*	*
6	1	1	0	1	*	*

Бұл жерде (*) – бейтарап жағдай. Сигналдың немесе логикалық «0» немесе логикалық «1» болуы мүмкін. Бірақ бұл сигналдардың мәндері құрылғылардың не кірісіне не шығысына ешқандай әсер етпейді.

Берілген демультиплексордың қалай жұмыс атқаратынын қарастырайық. Бұл құрылғы сигналдардың логикалық коммутаторы ретінде қолданылады. Ол бір ақпараттық кірістегі (D) сигналды, адрестік кірістердегі комбинацияға байланысты, құрылғыны шығысындағы бірнеше ақпараттық шығыстардың, біздің жағдайда (Y0 – Y2) – тің біріне қосады. Коммутатор адрестік кірістер (A0 – A1) арқылы басқарылады. Бұл адрестік сигналдар шығыстағы қандай каналды кіріс сигналына қосу керектігін анықтайды. Келесі суретте демультиплексердің жұмыс атқару картасы көрсетілген (Сурет 3).



Сурет 3 – Демультиплексердің жұмыс атқару картасы

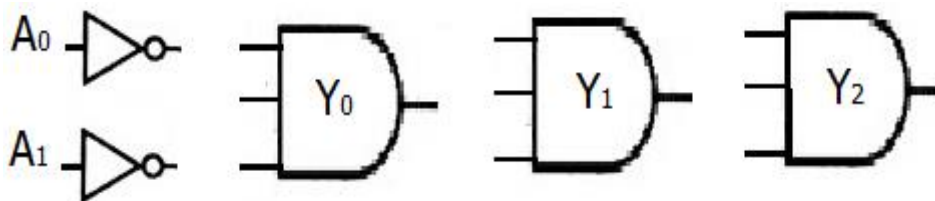
Кесте мен картаны пайдаланып, демультиплексердің шығыс функциясының теңдеулерін алайық:

$$Y_0 = D \bar{A}_1 \bar{A}_0$$

$$Y_1 = D \bar{A}_1 A_0$$

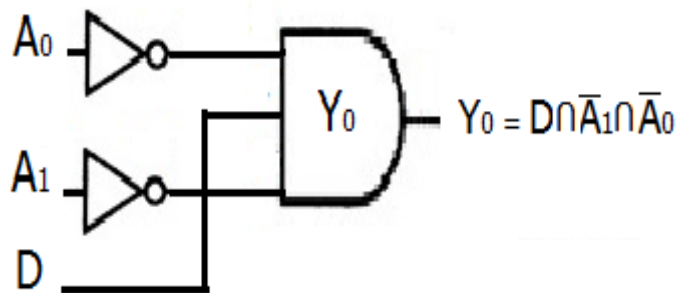
$$Y_2 = D A_1 \bar{A}_0$$

Демультиплексердің құрамын анықтаймыз. Бізге үш кірісті үш ЖӘНЕ ЛЭ – і мен адрестік кірістерге екі инвертор (ЕМЕС) қажет болады. Инверторлар адрестік кірістерге логикалық «0» беру үшін қолданылады (Сурет 4).

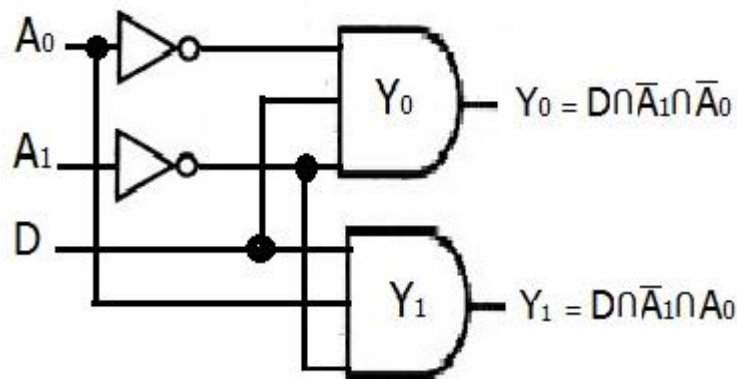


Сурет 4 – Демультиплексердің құрамы

Демультимплексердің құрамын анықтағаннан кейін, қадамдық режимде принципіалды сұлбасын кескіндейміз (Суреттер 5 - 7).



Сурет 5 – Сұлбаның Y_0 шығысын құрастыру

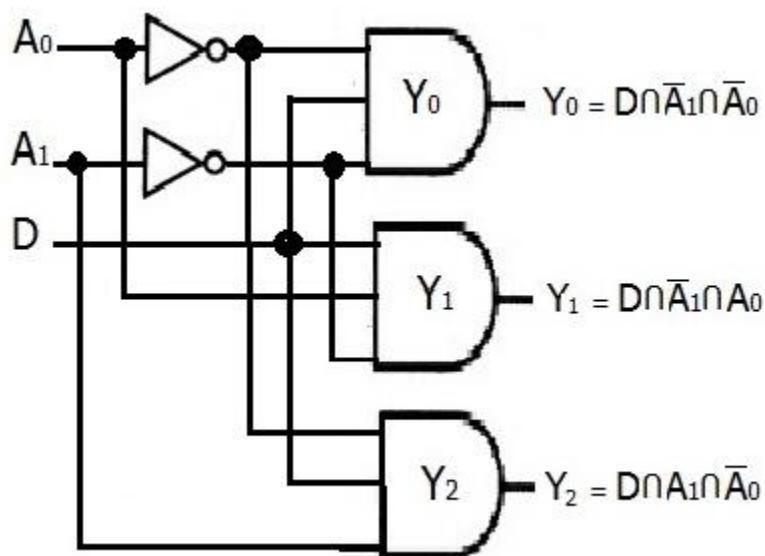


Сурет 6 – Сұлбаның Y_1 шығысын құрастыру

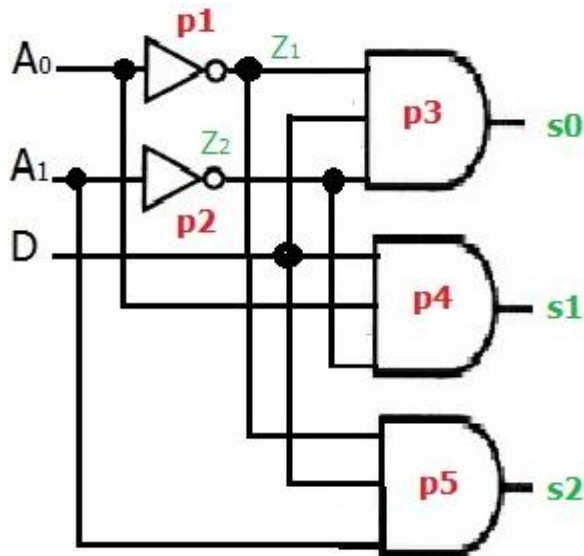
Демультимплексердің VHDL тілінде жазылған моделін құру үшін принципіалды сұлбаға өзгертулер енгіземіз:

1. Примитивтерді нөмірлейміз (p1 – p5);
2. Аралық сигналдарды анықтаймыз (z1, z2 - инверторлардың шығысы, s0, s1, s2 - конъюнкторлардың шығысы) (Сурет 8).

Принципіалды сұлбалармен жұмыс атқарғанда, сұлбалардың сол жақ кірістеріне, априори (орыс. *по умолчанию*) логикалық «1» келеді деп есептеледі. Инверторлар кірістерде логикалық «0» алу үшін қажет.



Сурет 7 – Демультимплексердың толық принципіалды сұлбасы



Сурет 8 – Демультимплексорды моделдеуге арналған сұлбасы

Демультимплексордың VHDL тілінде жазылған моделінің листингі (файл demultiplexsor.vhd):

```
entity dms is
port (d, a1, a0: in bit;
y2, y1, y0: out bit);
// демультимплексордің кіріс / шығыс сигналдарын тағайындау
end dms;

architecture Behavioral of dms is
// демультимплексордың архитектурасын (құрамын) анықтау
// демультимплексордың құрамында инвертор бар
component n
port ( a: in bit;
y: out bit) ;
end component;

// демультимплексордың құрамында үш кірісті конъюнктор бар

component a3
port ( a, b, c: in bit;
y: out bit);
end component;

signal z2, z1, s2, s1, s0: bit;
// аралық сигналдарды тағайындау

begin
// порт картасын толтыру
// әр примитивтің кіріс / шығыс сигналдарын мұқият толтыру қажет
// қате толтырған жағдайда, қателігі бар жоба алынады
// компилятор тек қана синтаксисті ғана тексереді
p1: n port map (a => a, y => z1);
p2: n port map (a => b, y => z2);
p3: a3 port map (a => z1, b => d, c => z2, y => s0);
p4: a3 port map (a => d, b => a0, c => z2, y => s1);
p5: a3 port map (a => z1, b => d, c => a1, y => s2);
```

```

y0<= s0;
y1<= s1;
y2<= s2;
endBehavioral;

```

```

entity n is
port ( a: in bit;
y: out bit);
end n;
architecture strl of n is
begin
// инвертор орындайтын терістеу амалы
y <= ( not a) after 1 ns;
end strl;

```

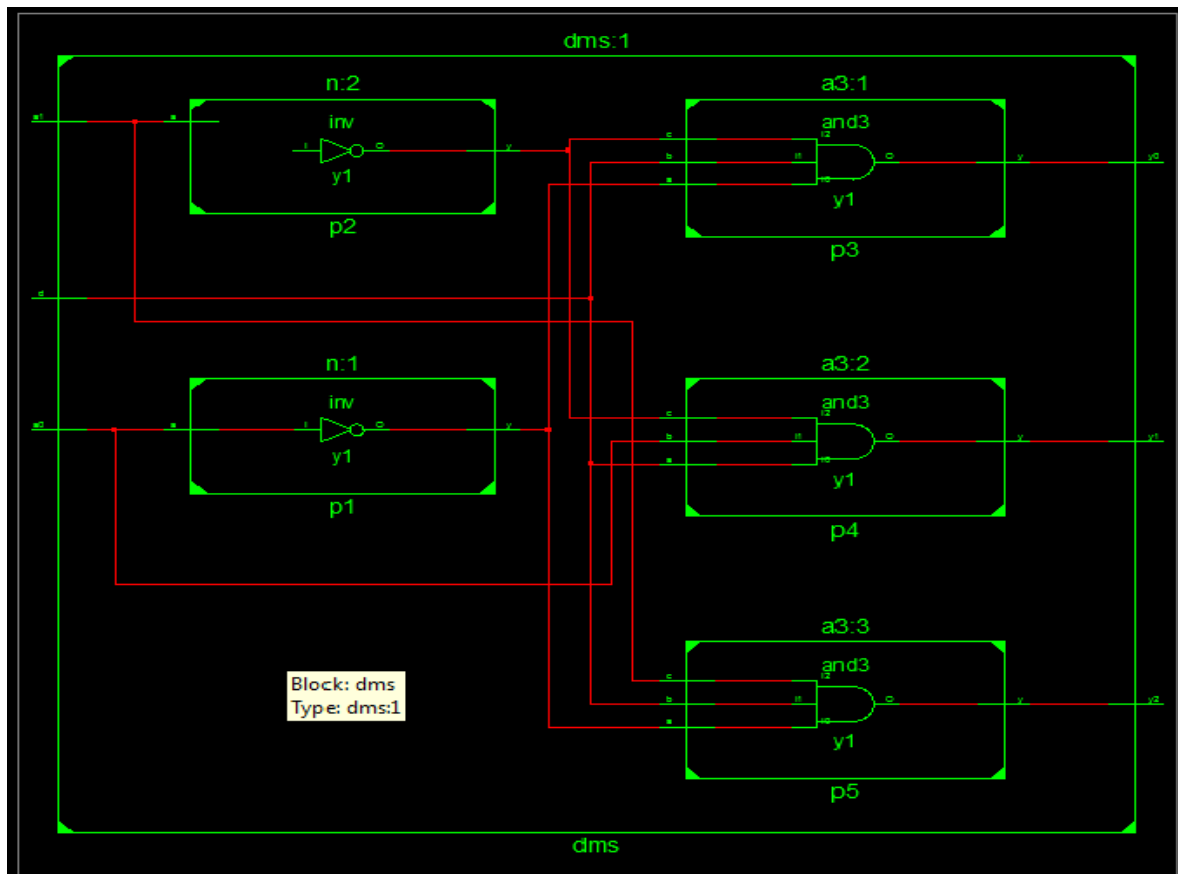
```

entity a3 is
port ( a, b, c: in bit;
y: out bit);
end a3;
architecture strl of a3 is
begin
// конъюнктор орындайтын логикалық көбейту амалы
y <= ( a and b and c) after 3 ns;
end strl;

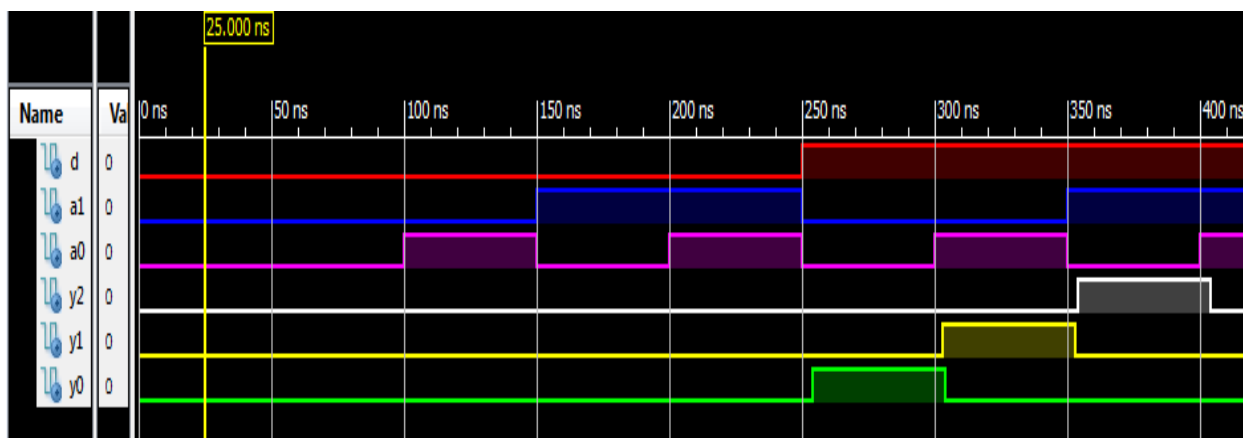
```

Демультиплексордың программасын XILINX ортасында компиляциялап сұлбасын алғаннан кейін (Сурет 9), тест – файл жазып осы ортада уақыттық диаграммасына ламыз (Сурет 10).

Дәл осы жолмен басқа да цифрлік құрылғылардың принципіалды сұлбаларын жобалап сызып, VHDL тілінде моделін құрып, уақыттық диаграммаларын алып, толық моделдеуге болады. Бұл жұмыстарды атқарған тәлімгерлер келешекте өздері әр – түрлі цифрлік құрылғыларды жобалап, құрастыра алатын болады.



Сурет 9 – Демультимплексорды XILINX – та алынған моделінің сұлбасы



Сурет 10 – Демультимплексорды XILINX – та алынған уақыттық диаграммасы

Пайданылған әдебиеттер

1. Бибилло П. Н. Основы языка VHDL. Изд. 3-е, доп. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 328 с.
2. Проектирование цифровых устройств в САПР XILINXWebPACKISE: учеб. – метод. пособие – Френкель Б. С., Кузьмич М. С.; Гомель: БелГУТ, 2006. – 54 с.
3. Дж. Ф.Уэйкерли - Проектирование цифровых устройств, т. 1. М.: Постмаркет, 2002. – 544 с.
4. В. Л. Шило – Популярныe цифровые микросхемы. Справочник. – М. Радио и связь, 1989. – 352 с.
5. Б. К. Жармакин – Цифровая электроника с основами программирования на языке VHDL. LAMBERT Academy Publishing, 2016. ISBN 978 – 3 – 659 – 87839 – 8. Учебное пособие.
6. WebPACK ISE DESIGN SUITE 13.4
7. <http://www.digitalelectronics.kz>
8. Б.К. Жармакин - Примеры программирования элементов цифровой электроники на языке VHDL в среде XILINX. Вестник Карагандинского университета им. Е.А.Букетова, серия Математика № 4 (80) / 2015 г. – Караганда: Издательство КарГУ, 2015. – Стр. 64 – 74.
9. Б. К. Жармакин – VHDL тілінде цифрлік электроника элементтерін бағдарламалау. Оқу құралы. Алматы.: Эверо баспасы., 2018. - 162 бет.

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ ТИПА ХААРА И СВОЙСТВА

А. Абиш, А. Байдавлетов, К. Сулейменов

Евразийский национальный университет

им. Л.Н. Гумилева, Астана

E-mail: Adilbek.abish@gmail.com, baidauletov_at@mail.ru, kenessary@mail.ru

В работе вводится система функций, называемая системой типа Хаара, изучается вопрос о полноте введенной системы, а также то, что данная система является базисом в пространстве $L^2(0, 1)$.

Ключевые слова. Ортонормированная система функций, коэффициенты Фурье.

На сегменте $[0, 1]$ введем систему функций следующим образом ($\alpha > 0$):

$$\chi_0^0(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\chi_{0,\alpha}^1(t) = \begin{cases} \sqrt{2^{1+\alpha} - 1}, & 0 \leq t < \frac{1}{2^{1+\alpha}}, \\ -\frac{1}{\sqrt{2^{1+\alpha} - 1}}, & \frac{1}{2^{1+\alpha}} < t \leq 1. \end{cases}$$

Для любого натурального числа n , $\alpha > 0$ положим

$$\chi_{n,\alpha}^1(t) = \begin{cases} \sqrt{2^{n(1+\alpha)}(2^{1+\alpha} - 1)}, & 0 \leq t < \frac{1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\ 0, & t = \frac{1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\ -\frac{\sqrt{2^{n(1+\alpha)}}}{\sqrt{2^{1+\alpha} - 1}}, & \frac{1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}} < t < \frac{1}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ -\frac{1}{(2^{1+\alpha} - 1)} \cdot \sqrt{\frac{2^{n(1+\alpha)}}{2^{1+\alpha} - 1}}, & t = \frac{1}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ 0, & \frac{1}{2^{n(1+\alpha)}} < t \leq 1. \end{cases}$$

$$\chi_{n,\alpha}^{(2^n)}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 - \frac{1}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ \frac{1}{2^{1+\alpha} - 1} \sqrt{2^{n(1+\alpha)}(2^{1+\alpha} - 1)}, & t = 1 - \frac{1}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ \sqrt{2^{n(1+\alpha)}(2^{1+\alpha} - 1)}, & 1 - \frac{1}{2^{n(1+\alpha)}} < t < 1 - \frac{2^{1+\alpha} - 1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\ 0, & t = 1 - \frac{2^{1+\alpha} - 1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\ -\sqrt{\frac{2^{n(1+\alpha)}}{2^{1+\alpha} - 1}}, & 1 - \frac{2^{1+\alpha} - 1}{2^{(n+1)(1+\alpha)}} < t \leq 1. \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Для $n = 1, 2, \dots$, $k = 2, \dots, 2^n - 1$, $\alpha > 0$

$$\chi_{n,\alpha}^k(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ \frac{1}{2^{1+\alpha}-1} \sqrt{2^{n(1+\alpha)}}, & t = \frac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ \sqrt{\frac{2^{n(1+\alpha)}(2^{1+\alpha}-1)}{k^{1+\alpha}-(k-1)^{1+\alpha}}}, \frac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}} < t < \frac{k^{1+\alpha}+(2^{1+\alpha}-1) \cdot (k-1)^{1+\alpha}}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\ 0, & t = \frac{k^{1+\alpha}+(2^{1+\alpha}-1) \cdot (k-1)^{1+\alpha}}{2^{(n+1)(1+\alpha)}}, \\ -\sqrt{\frac{2^{n(1+\alpha)}}{(2^{1+\alpha}-1)(k^{1+\alpha}-(k-1)^{1+\alpha})}}, \frac{k^{1+\alpha}-(2^{1+\alpha}-1) \cdot (k-1)^{1+\alpha}}{2^{(n+1)(1+\alpha)}} < t < \frac{k^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ -\frac{1}{2^{1+\alpha}-1} \sqrt{2^{n(1+\alpha)}}, & t = \frac{k^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}}, \\ 0, & \frac{k^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}} < t \leq 1. \end{cases}$$

Положим

$$\chi_1(t) \equiv \chi_0^{(0)}(t) \text{ и } \chi_{m,\alpha}(t) \equiv \chi_{n,\alpha}^{(k)}(t)$$

при $m = 2^n + k$, $1 \leq k \leq 2^n$, $\alpha > 0$, $n = 0, 1, \dots$

Данную систему назовем системой функций типа Хаара (определение системы Хаара см., напр. в [1, 2]).

Скалярным произведением функции $f, \varphi \in L(0, 1)$ называется [2]

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx.$$

Имеет место

Теорема 1. Система функций типа Хаара $\{\chi_{m,\alpha}(t)\}_{m=2}^\infty$ является ортонормированной в $L^2(0, 1)$.

Система функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ называется полной в пространстве $L(0, 1)$, если каждая функции $f \in L(0, 1)$, для которой справедливы соотношения

$$\int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = 0,$$

сама равна нулю [2].

Справедлива

Теорема 2. Система функций типа Хаара $\{\chi_{m,\alpha}(t)\}_{m=2}^\infty$ является полной в пространстве $L(0, 1)$.

Список использованных источников

1. П. Л. Ульянов, О рядах по системе Хаара, Матем. сб., 1964, том 63(105), №3, стр. 356–391.
2. С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, Москва, Физматгиз, 1958.

OUTPUT TRACKING FOR A CLASS OF UNCERTAIN HIGH-ORDER NONLINEAR TIME-DELAY SYSTEMS

Keylan Alimhan

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan

Abstract. In this paper, we study the problem of global practical output tracking via state feedback for a class of uncertain nonlinear time-delay systems. First, under mild conditions on the system nonlinearities involving time delay, we construct a homogeneous state feedback controller with an adjustable scaling gain. Then, by a homogeneous Lyapunov-Krasovskii functional, the scaling gain is adjusted to dominate the time-delay nonlinearities bounded by homogeneous growth conditions and render the tracking error can be made arbitrarily small while all the states of the closed-loop system remain to be bounded

Introduction

Consider the following uncertain nonlinear time-delay system

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= x_{i+1}(t)^{p_i} + \varphi_i(t, x(t), x(t-d), u(t)), \quad i=1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n(t) &= u + \varphi_n(t, x(t), x(t-d), u(t)), \\ y(t) &= x_1(t),\end{aligned}\tag{1}$$

where $x(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in R^n$, $u \in R$, and $y(t) \in R$ are the system state, control input and output, respectively. The constant $d \geq 0$ is a given time-delay of the system, for $i=1, \dots, n$, and the system initial condition is $x(\theta) = \varphi_0(\theta)$, $\theta \in [-d, 0]$. The terms $\varphi_i(\cdot)$ represent nonlinear perturbations that are unknown continuous functions and $p_i \in R_{\text{odd}}^{\geq 1} := \{p/q \in [0, \infty) : p \text{ and } q \text{ are odd integers, } p \geq q\}$ ($i=1, \dots, n-1$) are said to be the high orders of the system.

Global practical output tracking problem of nonlinear systems is one of the most important and challenging problems in the field of nonlinear control and has received a great deal of attention. By posed some conditions on system growth and power order, the practical output tracking problem of system (1) has been well-studied and a number of interesting results have been achieved over the past years, see [1-8], as well as the references therein.

However, the aforementioned results have not considered the time-delay effect. It is well known that time-delay phenomena exist in many practical systems such as electrical networks, microwave oscillator, and hydraulic systems, etc., due to the presence of time delay in systems, it often significant effect on system performance. Therefore, the study the problem of output tracking and stabilization of time-delay nonlinear systems has important practical significance and has received much attention in recent years. In recent years, by employing the Lyapunov-Krasovskii method to deal with the time-delay, control theory, and techniques for stabilization problem of time-delay nonlinear systems were greatly developed and advanced methods have been made; see, for instance, [9 -13] and reference therein. Compared with study the stabilization problem contain time-delay, the theory of output tracking control developed slower. In the case when the nonlinearities contain time-delay, for the output tracking problems, some interesting results have been obtained [14-16]. However, in [14 -16] only considered special case for the system (1), i.e., $p_i = 1$ case. When the system under consideration is inherently time-delay non-linear, the problem becomes more complicated and difficult to solve. To the best of our knowledge, many interesting output tracking control problems for time delay inherently nonlinear systems unsolved yet. In this paper, we deal with such as the tracking problems via state feedback domination method in [17,18].

Mathematical Preliminaries

We collect the definition of homogeneous function and several useful lemmas.

Definition1[19]. For a set of coordinates $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ and an n -tuple $r = (r_1, \dots, r_n)$ of positive real numbers we introduce the following definitions.

- (i) A dilation $\Delta_s(x)$ is a mapping defined by $\Delta_s^r(x) = (s^{r_1}x_1, \dots, s^{r_n}x_n)$, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $\forall s > 0$, where r_i are called *the weights of the coordinate*. For simplicity of notation, the dilation weight is denoted by $\Delta = (r_1, \dots, r_n)$.
- (ii) A function $V \in C(R^n, R)$ is said to be *homogeneous of degree τ* if there is a real number $\tau \in R$ such that $V(\Delta_s^r(x)) = s^\tau V(x_1, \dots, x_n)$, $\forall x \in R^n - \{0\}$.
- (iii) A vector field $f \in C(R^n, R^n)$ is said to be *homogeneous of degree τ* if the component f_i is *homogeneous of degree $\tau + r_i$* for each i , that is, $f_i(\Delta_s^r(x)) = s^{\tau+r_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$, $\forall x \in R^n$, $\forall s > 0$, for $i = 1, \dots, n$.
- (iv) A homogeneous p -norm is defined as $\|x\|_{\Delta, p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p/r_i} \right)^{1/p}$, $\forall x \in R^n$, $p \geq 1$.

For the simplicity, write $\|x\|_\Delta$ for $\|x\|_{\Delta, 2}$.

Next, we introduce several technical lemmas which will play an important role and be frequently used in the later control design.

Lemma1[19]. Denote $\Delta = (r_1, \dots, r_n)$ as dilation weight, and suppose $V_1(x)$ and $V_2(x)$ are homogeneous functions with degree τ_1 and τ_2 , respectively. Then, $V_1(x)V_2(x)$ is also homogeneous function with degree of $\tau_1 + \tau_2$ with respect to the same dilation Δ .

Lemma2[19]. Suppose $V : R^n \rightarrow R$ is a homogeneous function of degree τ with respect to the dilation weight Δ . Then, the following (i) and (ii) hold:

- (iii) $\partial V / \partial x_i$ is also homogeneous of degree $\tau - r_i$ with r_i being the homogeneous weight of x_i .
- (iv) There is a constant $\sigma > 0$ such that $V(x) \leq \sigma \|x\|_\Delta^\tau$. Moreover, if $V(x)$ is positive definite, there is a constant $\rho > 0$ such that $\rho \|x\|_\Delta^\tau \leq V(x)$.

Lemma3[17]. For all $x, y \in R$ and a constant $p \geq 1$ the following inequalities hold:

$$(i) \quad |x+y|^p \leq 2^{p-1} |x^p + y^p|, \quad (|x|+|y|)^{1/p} \leq |x|^{1/p} + |y|^{1/p} \leq 2^{(p-1)/p} (|x|+|y|)^{1/p}$$

If $p \in R_{odd}^{\geq 1}$, then

$$(ii) \quad |x-y|^p \leq 2^{p-1} |x^p - y^p| \quad \text{and} \quad |x^{1/p} - y^{1/p}| \leq 2^{(p-1)/p} |x-y|^{1/p}.$$

Lemma4[18]. Let c, d be positive constants. Then, for any real-valued function $\gamma(x, y) > 0$, the following inequality holds:

$$|x|^c |y|^d \leq \frac{c}{c+d} \gamma(x, y) |x|^{c+d} + \frac{d}{c+d} \gamma^{-c/d}(x, y) |y|^{c+d}.$$

This paper deals with the practical output tracking problem by state feedback for time-delay high-order nonlinear systems (1). Here, we give a precise definition of the problem.

The problem of global practical tracking by a state feedback: Consider system (1) and assume that the reference signal $y_r(t)$ is a time-varying C^1 -bounded function on $[0, \infty)$. For any given $\varepsilon > 0$, design a state feedback controller having the following structure

$$u(t) = g(x(t), y_r(t)), \tag{2}$$

such that

- iii) All the state of the closed-loop system (1) with state controller (2) is well-defined and globally bounded on $[0, \infty)$.

iv) For any initial condition, there is a finite time $T > 0$, such that

$$|y(t) - y_r(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq T > 0. \quad (3)$$

In order to solve the global practical output tracking problem, we made the following two assumptions:

Assumption1. There are constants C_1 , C_2 and $\tau \geq 0$ such that

$$\begin{aligned} |\varphi_i(t, x(t), x(t-d), u(t))| \leq & C_1 \left(|x_1(t)|^{(r_1+\tau)/r_1} + |x_2(t)|^{(r_1+\tau)/r_2} + \dots + |x_i(t)|^{(r_1+\tau)/r_i} \right. \\ & \left. + |x_1(t-d)|^{(r_1+\tau)/r_1} + |x_2(t-d)|^{(r_1+\tau)/r_2} + \dots + |x_i(t-d)|^{(r_1+\tau)/r_i} \right) + C_2 \end{aligned} \quad (4)$$

where $r_1 = 1$, $r_{i+1}p_i = r_i + \tau > 0$, $i = 1, \dots, n$ and $p_n = 1$.

Assumption2. The reference signal $y_r(t)$ is continuously differentiable. Moreover, there is a known constant $D > 0$, such that

$$|y_r(t)| + |\dot{y}_r(t)| \leq D, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Output Tracking Control Design

In this paper, we deal with the practical output tracking problem by delay-independent state feedback for high-order time-delay nonlinear systems (1) under Assumptions 1-2. To this end, we first introduce the following coordinate transformation:

$$z_1 := x_1 - y_r, \quad z_i := \frac{x_i}{L^{\kappa_i}}, \quad i = 2, \dots, n, \quad v := \frac{u}{L^{\kappa_n+1}} \quad (5)$$

where $\kappa_1 = 0$, $\kappa_i = (\kappa_{i-1} + 1)/p_{i-1}$, $i = 2, \dots, n$ and $L \geq 1$ is a scaling gain to be determined later. Then, the system (1) can be described in the new coordinates z_i as

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= Lz_{i+1}^{p_i} + \psi_i(t, z(t), z(t-d), v), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{z}_n &= Lv + \psi_n(t, z(t), z(t-d), v), \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} \psi_1(t, z(t), z(t-d), v) &= \varphi_1(t, z(t), z(t-d), v) - \dot{y}_r, \\ \psi_i(t, z(t), z(t-d), v) &= \varphi_i(t, z(t), z(t-d), v) / L^{\kappa_i}, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Now, using Assumption 1, Lemma 3, the fact that $L \geq 1$ and the boundedness of y_r and $\dot{y}_r$ guaranteed by Assumption 2, ensures the existence of constants $\bar{C}_i$, $i = 1, 2$ only depending on constants C_1, C_2 , τ , κ_i and L , under which (4) becomes

$$\begin{aligned} |\psi_1(t, z(t), z(t-d), v)| &\leq \bar{C}_1 \left(|z_1(t)|^{(r_1+\tau)/r_1} + |z_1(t-d)|^{(r_1+\tau)/r_1} \right) + \bar{C}_2 \\ |\psi_i(t, z(t), z(t-d), v)| &\leq \bar{C}_1 L^{1-\nu_i} \sum_{j=1}^i \left(|z_j(t)|^{(r_1+\tau)/r_j} + |z_j(t-d)|^{(r_1+\tau)/r_j} \right) + \frac{\bar{C}_2}{L^{\kappa_i}}, \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

where $\bar{C}_1 > 0$, $\bar{C}_2 > 0$ and $\nu_i := \min\{1 - \kappa_j(r_i + \tau)/r_j + \kappa_i, 2 \leq j \leq i, 1 \leq i \leq n\} > 0$ are some constants.

In what follows, we will employ the homogeneous domination approach to construct a global state feedback controller for system (6).

First, we construct a homogeneous state feedback controller for the nominal nonlinear system without considering the non-linearity of $\psi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n-1$ in (6), i.e.,

$$\dot{z}_i = Lz_{i+1}^{p_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \dot{z}_n = Lv, \quad y = z_1 \quad (8)$$

Using similar the approach in [11, 17-18], we can design a homogeneous state feedback stabilizer for (8), which can be described in the following Theorem1.

Theorem1. For a real given number $\tau \geq 0$, there is a homogeneous state feedback controller of degree τ such that the nonlinear systems (8) is globally asymptotically stable.

Proof. To prove the result, we use an inductive argument (recursive design method) to explicitly construct a homogeneous stabilizer for system (8).

Initial step 1. Let $\xi_1 = z_1^{\sigma/r_1} - z_1^{*\sigma/r_1}$, where $z_1^* = 0$ and $\sigma \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{1, \tau + r_i\}$ is a positive number.

Choose the Lyapunov function

$$V_1 = W_1 = \int_{z_1^*}^{z_1} \left(s^{\sigma/r_1} - z_1^{*\sigma/r_1} \right)^{(2\sigma - \tau - r_1)/\sigma} ds.$$

From (8), it follows that

$$\dot{V}_1 \leq -nL\xi_1^2 + L\xi_1^{(2\sigma - \tau - r_1)/\sigma} \left(z_2^{p_1} - z_2^{*p_1} \right) \quad (9)$$

where z_2^* the virtual controller and it is chosen as

$$z_2^* = -n^{1/p_1} z_1^{(r_1 + \tau)/p_1} := -\beta_1^{r_2/\sigma} \xi_1^{r_2/\sigma}, \quad \beta_1 = n^{\sigma/(r_2 p_1)}. \quad (10)$$

Step k ($k = 2, \dots, n$). Suppose at the *step k-1*, there is a C^1 , positive definite and proper Lyapunov function V_{k-1} , and a set of virtual controllers $z_1^*, \dots, z_k^*$ defined by

$$\begin{aligned} z_1^* &= 0, & \xi_1 &= z_1^{\sigma/r_1} - z_1^{*\sigma/r_1} \\ z_i^* &= -\beta_{i-1}^{r_i/\sigma} \xi_{i-1}^{r_i/\sigma}, & \xi_i &= z_i^{\sigma/r_i} - z_i^{*\sigma/r_i}, \quad i = 2, \dots, k \end{aligned} \quad (11)$$

with $\beta_i > 0$, $1 \leq i \leq k-1$ being constants, such that

$$\dot{V}_{k-1} \leq -(n-k+2)L \sum_{l=1}^{k-1} \xi_l^2 + L\xi_{k-1}^{(2\sigma - \tau - r_{k-1})/\sigma} \left(z_k^{p_{k-1}} - z_k^{*p_{k-1}} \right). \quad (12)$$

We claim that (12) also holds at *Step k*, i.e., there is a C^1 , proper, positive definite Lyapunov function defined by

$$V_k(\bar{z}_k) = V_{k-1}(\bar{z}_{k-1}) + W_k(\bar{z}_k), \quad W_k(\bar{z}_k) = \int_{z_k^*}^{z_k} \left(s^{\sigma/r_k} - z_k^{*\sigma/r_k} \right)^{(2\sigma - \tau - r_k)/\sigma} ds \quad (13)$$

and virtual controller $z_{k+1}^* = -\beta_k^{r_{k+1}/\sigma} \xi_k^{r_{k+1}/\sigma}$ such that

$$\dot{V}_k \leq -(n-k+1)L \sum_{j=1}^k \xi_j^2 + L\xi_k^{(2\sigma - \tau - r_k)/\sigma} \left(z_{k+1}^{p_k} - z_{k+1}^{*p_k} \right). \quad (14)$$

Since the prove of the claim (14) is very similar [4-5, 14], so omitted here.

Using the inductive argument above, we can conclude that at the n -th step, there exists a state feedback controller of the form

$$v = -\beta_n^{r_{n+1}/\sigma} \xi_n^{r_{n+1}/\sigma} = -\left(\sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i z_i^{\sigma/r_i} \right)^{r_{n+1}/\sigma} \quad (15)$$

with the C^1 , proper and positive definite Lyapunov function,

$$V_n = \sum_{i=1}^n \int_{z_i^*}^{z_i} \left(s^{\sigma/r_i} - z_i^{*\sigma/r_i} \right)^{(2\sigma - \tau - r_i)/\sigma} ds \quad (16)$$

we arrive at

$$\dot{V}_n \leq -L \sum_{j=1}^n \xi_j^2, \quad (17)$$

where $\xi_i = z_i^{\sigma/r_i} - z_i^{*\sigma/r_i}$ and $\bar{\beta}_i = \beta_n \cdots \beta_i$, $i = 1, \dots, n$ are positive constants. Thus, the closed-loop system (8) and (15) is globally asymptotically stable.

Now, we are ready to use the homogeneous domination approach to design a global tracking controller for the system (1), i.e., state the following main result in this paper.

Theorem 2. For the time-delay nonlinear system (1) under Assumptions 1-2, the global practical output tracking problem is solvable by the state feedback controller $u = L^{K_n+1}v$ in (6) and (15).

Proof. We define the compact notations

$$z = (z_1, \dots, z_n)^T, \quad E(z) = (z_2^{p_1}, \dots, z_n^{p_{n-1}}, v)^T \text{ and } F(z) = (\varphi_1, \varphi_2/L^{K_2}, \dots, \varphi_n/L^{K_n})^T. \quad (18)$$

Using the same notation (6) and (18), the closed-loop system (6) - (15) can be written as the following compact form:

$$\dot{z} = LE(z) + F(z) \quad (19)$$

Moreover, it can be shown that V_n is homogeneous of degree $2\sigma - \tau$. Hence, adopting the same Lyapunov function (16) and by Lemm2 and Lemma 3, it can be concluded that

$$\dot{V}_n(z) = L \frac{\partial V_n}{\partial Z} E(z) + \frac{\partial V_n}{\partial Z} \cdot \dot{F}(z) \leq -m_1 L \|z\|_{\Delta}^{2\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_n}{\partial z_i} \psi_i \quad (20)$$

where $m_1 > 0$ is constant.

By (7), Assumption 1 and $L > 1$, we can find constants $\delta_i > 0$ and $0 < \gamma_i \leq 1$ such that

$$\left| \frac{\partial V_n}{\partial z_i} \psi_i \right| \leq m_2 (1 + \delta_i) L^{1-\gamma_i} \|z\|_{\Delta}^{2\sigma} + m_2 \|z\|_{\Delta}^{2\sigma-\tau-r_i} \|z(t-d_j(t))\|_{\Delta}^{r_i+\tau} + \frac{\omega^{2\sigma/(\tau+r_i)}}{L^{1+\gamma_i}}, \quad (21)$$

where $\omega = m_2 \bar{C}_2$, $m_2 > 0$, $\frac{2\sigma-\tau-r_i}{2\sigma} \leq 1$, $\frac{\tau+r_i}{2\sigma} \leq 1$, and $\frac{2\sigma-(1-\gamma_i)}{\tau+r_i} - (1-\gamma_i) \geq 1 + \kappa_i$.

Substituting (21) into (20) yields

$$\dot{V}_n(z) \leq -L \left(m_1 \|z\|_{\Delta}^{2\sigma} - (1 + m_2(1+\delta)) \sum_{i=1}^n L^{-\gamma_i} \|z\|_{\Delta}^{2\sigma} - m_2 \sum_{i=1}^n L^{-\gamma_i} \|z\|_{\Delta}^{2\sigma-\tau-r_i} \|z(t-d)\|_{\Delta}^{r_i+\tau} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\omega^{2\sigma/(\tau+r_i)}}{L^{1+\gamma_i}} \quad (22)$$

By Lemma4, there exists a constant $m_3 > 0$ such that

$$m_2 \|z\|_{\Delta}^{2\sigma-\tau-r_i} \|z(t-d)\|_{\Delta}^{r_i+\tau} \leq \|z\|_{\Delta}^{2\sigma} + m_3 \|z(t-d)\|_{\Delta}^{2\sigma}, \quad (23)$$

which yields

$$\dot{V}_n(z) \leq -L \left(m_1 \|z\|_{\Delta}^{2\sigma} - (2 + m_2(1+\delta)) \sum_{i=1}^n L^{-\gamma_i} \|z\|_{\Delta}^{2\sigma} - m_3 \sum_{i=1}^n L^{-\gamma_i} \|z(t-d)\|_{\Delta}^{2\sigma} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\omega^{2\sigma/(\tau+r_i)}}{L^{1+\gamma_i}}, \quad (24)$$

Construct a Lyapunov-Krasovskii functional as follows:

$$V(z(t)) = V_n(z(t)) + \eta \int_{t-d}^t \|z(s)\|_{\Delta}^{2\sigma} ds, \quad (25)$$

where η is a positive constant. Let $\eta = m_3 \sum_{i=1}^n L^{1-\gamma_i}$ follows from (23) and (24) that

$$\dot{V} \leq -L \left(m_1 - (2 + m_2(1+\delta) + m_3) \sum_{i=1}^n L^{-\gamma_i} \right) \|z(t)\|_{\Delta}^{2\sigma} + \frac{\rho_1}{L^{1+\gamma}}. \quad (26)$$

Hence, by choosing a large enough L as $L > \max \left\{ 1, \left((2 + m_2(1+\delta) + m_3) / m_1 \right)^{-\gamma} \right\}$, where $\gamma = \min_{1 \leq i \leq n} \{\gamma_i\}$

and $\rho_1 = \sum_{i=1}^n \omega^{2\sigma/(\tau+r_i)}$.

Then, there exists a constant $\rho_2 > 0$, such that (26) becomes

$$\dot{V}(z(t)) \leq -\rho_2 \|z(t)\|_{\Delta}^{2\sigma} + 2\rho_1. \quad (27)$$

from (27) and homogeneous properties of $V_n(z)$ and $\int_{t-d}^t \|z(s)\|_{\Delta}^{2\sigma} ds$, it is clear that $z_1 = y - y_r$ can be rendered smaller than any positive tolerance with a sufficiently large L .

Conclusion

In this paper, we have studied the practical output tracking problem for a class of uncertain non-linear time-delay systems under a homogeneous condition. We design a homogeneous state feedback controllers have been constructed with adjustable scaling gains. Then, via a homogeneous Lyapunov-Krasovskii functional, we've redesigned the homogeneous domination approach to tune the scaling gain for the overall the closed loop systems. It is shown that an appropriate choice of gain will enable us to globally track for a class of uncertain non-linear systems in finite time.

References

- [1] C.J. Qian, W. Lin, Practical output tracking of nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization, *IEEE Trans. on Automatic Control*, (2002), 47, pp. 21-36.
- [2] Z.Y. Sun, Y.G. Liu, Adaptive practical output tracking control for high-order nonlinear uncertain systems, *Acta Automatica Sinica*, (2008), 34, pp. 984-989.

- [3] K. Alimhan, H. Inaba, Practical output tracking by smooth output compensator for uncertain nonlinear systems with unstabilisable and undetectable linearization, *Int. J. of Modelling, Identification and Control*, (2008), 5, pp.1-13.
- [4] K. Alimhan, H. Inaba, Robust practical output tracking by output compensator for a class of uncertain inherently nonlinear systems, *Int. J. of Modelling, Identification and Control*, (2008), 4, pp.304-314.
- [5] J. Zhai, S. Fei, Global practical tracking control for a class of uncertain non-linear systems, *IET Control Theory and Applications*, (2011), 5, pp.1343-1351.
- [6] K. Alimhan, N. Otsuka, A note on practically output tracking control of nonlinear systems that may not be linearizable at the origin, *Communications in Computer and Information Science*, 256 CCIS, (2011), pp. 17-25.
- [7] K. Alimhan, N. Otsuka, A. A. Adamov, M. N. Kalimoldayev, Global practical output tracking of inherently nonlinear systems using continuously differentiable controllers, *Mathematical Problems in Engineering*, (2015), Article ID 932097, 10 pages.
- [8] K. Alimhan, N. Otsuka, M. N. Kalimoldayev, A. A. Adamov, Further results on output tracking problem of uncertain nonlinear systems with high-order nonlinearities, *Int. J. of Control and Automation*, (2016), 9, pp.409-422.
- [9] Zongyao Sun, Yungang Liu and Xuejun Xie, Global stabilization for a class of high-order time-delay nonlinear systems, *Int. J. of Innovative Computing, Information and Control*, (2011), 7, pp. 7119-7130.
- [10] Sun Z, Xie X, Liu Z., Global stabilization of high-order nonlinear systems with multiple time delays, *Int. J. of Control*, (2013), 86, pp.768-778.
- [11] Lin Chai, Global output control for a class of inherently higher-order nonlinear time-delay systems based on homogeneous domination approach, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (2013), Article ID 180717, 6 pages.
- [12] Fangzheng Gao, Yuqiang Wu, Further results on global state feedback stabilization of high-order nonlinear systems with time-varying delays, *ISA Trans.*, (2015), 55, pp. 41-48.
- [13] Xu Zhang, Wei Lin, and Yan Lin, Nonsmooth feedback control of time-delay nonlinear systems: a dynamic gain based approach, *IEEE Trans. on Automatic Control*, (2017), 62, pp. 438-444.
- [14] Xuehua Yan, Xinmin Song, Global practical tracking by output feedback for nonlinear systems with unknown growth rate and time delay, *The Scientific World Journal*, 2014, Article ID 713081, 7 pages.
- [15] Xianglei Jia, Shengyuan Xu, JunChen, Ze Li, Yun Zou, Global output feedback practical tracking for time-delay systems with uncertain polynomial growth rate, *Journal of the Franklin Institute*, 352(2015), pp. 5551-5568.
- [16] Xianglei Jia, Shengyuan Xu, Qian Ma, Zhidong Qi and Yun Zou, "Global practical tracking by output feedback for a class of non-linear time-delay systems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, (2016), 33, pp.1067-1080.
- [17] J. Polendo, C. Qian, A universal method for robust stabilization of nonlinear systems: unification and extension of smooth and non-smooth approaches, *Proc. of the American Control Conference*, (2006), pp.4285-4290.
- [18] J. Polendo and C. Qian, A generalized homogeneous domination approach for global stabilization of inherently nonlinear systems via output feedback, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, (2007), vol. 7, No.7, pp. 605-629.
- [19] L. Rosier, Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector fields, *Systems & Control Letters*, (1992), 19, pp. 467-473.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ В ПОТОКОВОМ ШИФРОВАНИИ

Арсланбаев М.М., Бакытжан А.Б.
Университет «Туран-Астана», Астана
E-mail: marat.arslanbaev@yandex.ru

В работе изучается один из методов генерации ключевой последовательности для потокового шифрования. Предлагается первоначальное применение выбранной ключевой последовательности некоторой длины, затем, данная последовательность преобразуется по некоторому алгоритму, в качестве примера, можно взять преобразованную последовательность Фибоначчи. В работе также изучается применение автоморфизма матриц и циклическая последовательность для выбора ключевой последовательности.

При шифровании применением потоковых шифров, отличительными свойствами являются шифрование открытого текста последовательно по 1 байту, также сами шифры представляют разновидность гаммирования, т.е. символы открытого ключа суммируются с соответствующими символами ключевой последовательности. Отсюда сложность шифрованного текста зависит от выбранной ключевой последовательности.

Приведем сам алгоритм работы потокового шифрования:

1. Генератор ключевой последовательности определяет некоторую последовательность $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$, каждый член которого имеет 1 бит;

2. Данная последовательность суммируют по модулю 2 с последовательность открытого текста $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$:

$$c_i = p_i \oplus k_i, i = 1, \dots, n, \dots \quad (1)$$

Так определяется шифрованная последовательность. Поэтому, ключевая последовательность должна определяться генератором случайных чисел. Определению алгоритмов случайных чисел посвящены много работ, можно отметить работы [1,2].

Отметим, что процесс расшифрование имеет простой вид:

$$c_i \oplus k_i = p_i \oplus k_i \oplus k_i = p_i, i = 1, \dots, n, \dots \quad (2)$$

Примером потокового шифрования является шифрование Цезаря, в котором ключевой последовательностью является сдвиг букв алфавита на фиксированное число

$$q_i = p_i \oplus k, i = 1, \dots, n, \dots \quad (3)$$

В данном случае, $p_i \rightarrow q_i$, т.е. все буквы алфавита сдвигаются на k букв, после чего в открытом сообщении каждая буква заменяется по ключевой последовательности. Ясно, что метод шифрования является в достаточной мере примитивным, так как перебор вариантов на сдвиг не займет много времени.

Конечно, можно обобщить тот же метод Цезаря, т.е. сдвиг на определенное количество букв, а именно, разделить алфавит на несколько групп и для каждой группы определить свой сдвиг, также можно взять, в качестве ключевой последовательности, целочисленную последовательность $\{k_i\}_{i=1}^n$, тогда каждая буква будет иметь свой сдвиг. Данный подход может усложнить процесс расшифровки. В этом случае последовательность $\{k_i\}_{i=1}^n$ будет секретным ключом.

Отметим, что данное обобщение не может быть предельным.

Нами предлагается следующее обобщение для данного метода шифрования:

1. Используя некоторый генератор случайных чисел, определим ключевую последовательность определенной длины n ;
2. Определим некоторый вектор длины n , который будет применяться в качестве кодового вектора;
3. Ключевую последовательность определенной длины n преобразуем посредством кодового вектора.

Таким образом, данный метод окажется комбинированием блочного и потокового шифрования.

Рассмотрим более подробно приведенный метод.

1. В качестве генератора случайных чисел, можно взять, к примеру, последовательность

$$X_{n+1} = (a \cdot X_n + c) \bmod m, \quad (4)$$

где тройка и вид последовательности

$$(a, c, m, X_n) \quad (5)$$

будет играть роль секретного ключа. Как было изучено в [1], в случае, когда $a \gg m$, а $c < m$, $(c, m) = 1$, последовательность $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет период равный m , причем X_0 можно выбрать произвольно. Данное свойство позволяет определять множество ключей.

2. Кодовый вектор также можно определять указанным генератором или же другими генераторами, которые изучены на случайность в [1].

Теперь, рассмотрим другой подход для определения ключевой последовательности и потокового шифрования, а именно, открытое сообщение разобьем на блоки длины n . Для каждого блока нужно определить матрицу размерности $N \times n$, причем число $N < n$ или же $N > n$, т.е. длина шифрованного сообщения может быть больше или меньше длины открытого сообщения. В этом случае, когда $N < n$, можно взять набор из n целых чисел по определенному условию и рассмотреть циклическую перестановку до порядка $N < n$.

Тогда в качестве операции $\oplus$ будет выбираться умножение матрицы на вектор, причем вектор берется в транспонированном виде, а количество столбцов матрицы будет равно количеству координат вектора.

Введем некоторые обозначения:

Пусть конечная последовательность $\{X_i\}_{i=1}^n$ есть заданное открытое сообщение, также возьмем конечную последовательность целых чисел $\{Z_i\}_{i=1}^n$ в качестве набора целых чисел, причем $\{Z_i\}_{i=1}^n$ можно определять и через генератор случайных чисел.

Тем самым, циклическая последовательность длины будет в виде (для простоты приведем квадратную матрицу 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Пусть вектор $\{Y_i\}_{i=1}^N$ есть шифрованное сообщение. Тогда шифрование будет проводиться следующим образом:

$$Y = A \times X. \quad (7)$$

Отметим, что в этом случае расшифровка окажется сложной задачей.

В случае, когда $N = n$, циклическая последовательность, члены которых можно выбирать по генератору случайных чисел, удовлетворяет следующим свойствам:

1. Матрица квадратная,

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots \\ z_n & \dots & z_1 \end{pmatrix}; \quad (8)$$

2. Определитель данной матрицы отличен от 0, что гарантирует существование обратной матрицы.

Тогда шифрование определяется равенством

$$Y = A \times X. \quad (9)$$

Процесс расшифрования будет иметь вид

$$X = A^{-1} \times Y. \quad (10)$$

Замечание. Конечно, выбираемый ключ в виде ключевой последовательности и в виде матрицы можно определять различными методами. В качестве генератора случайных чисел, можно взять, к примеру, последовательность

$$X_{n+2} = (X_{n+1} + X_n) \bmod m, \quad (11)$$

тогда роль секретного ключа будет играть пара

$$(m, X_1). \quad (12)$$

Можно ввести еще одно обобщение выбираемой ключевой последовательности, применяя циклическую последовательность (8), а также диагональную матрицу порядка $N = n$, а именно, возьмем последовательность диагональных матриц

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \dots, D_n = \begin{pmatrix} n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & n \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Теперь, возьмем циклическую последовательность матриц, следующим образом:

$$A_1 = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots \\ z_n & \dots & z_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} z_2 & \dots & z_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{n-1} & \dots & z_2 \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} z_n & \dots & z_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Тогда матрица, которая является ключевой последовательностью, определяется в виде произведения векторов

$$G = (D, A) = \sum_{k=1}^n (D_k \cdot A_k). \quad (15)$$

В этом случае, секретным ключом является пара

$$(D, A): D = (D_1, \dots, D_n), A = (A_1, \dots, A_n). \quad (16)$$

Тогда для открытого текста длины n , $a = (a_1, \dots, a_n)$ потоковое шифрование будет иметь вид:

$$b = G \cdot a^T = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \cdot (a_1, \dots, a_n)^T. \quad (17)$$

Тогда операция расшифрование имеет вид:

$$(a_1, \dots, a_n)^T = G^{-1} \cdot b. \quad (18)$$

Отметим, что в работе приведены только некоторые методы потокового шифрования, причем эти методы комбинируют блочные и потоковые шифрования.

Список использованных источников

1. Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. М.: Мир, 1977.
2. Баричев С.Г., Гончаров В.В., Серов Р.Е. Основы современной криптографии. М.: «Горячая линия - Телеком», 2001.

РАСЧЕТЫ РИСКОВ В МОДЕЛЯХ СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

Беккужина А.Б. , Рахимжанова С.К.

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: a.bekkuzhina@mail.ru, srahimzhanova@mail.ru

Понятие риска является ключевым в теории и практике страхования. Среди множества определений риска, представленных в общей и экономической литературе, можно выделить две основные стороны рассмотрения этого понятия в контексте страхования. Первый уровень рассмотрения связан с общим понятием риска. С этой точки зрения риск рассматривается как вероятность наступления неблагоприятного события. Это риски краж, пожаров, потери здоровья, внезапной смерти, дорожно-транспортных происшествий и т.д. Второй уровень рассмотрения связан с ожидаемыми финансовыми результатами деятельности страховой компании. В этом случае риск представляет собой вероятностное отклонение фактических результатов деятельности фирмы от ожидаемых. При этом возможны три основных результата:

- 1) положительный – достижение желаемых результатов, получение выгоды;
- 2) нулевой – в результате деятельности страховая компания не получила желаемой выгоды, но и не понесла потери;
- 3) отрицательный – в результате деятельности страховая компания понесла материальные потери.

Различают качественную и количественную оценку риска. При качественной оценке определяются возможные виды риска, а также факторы, влияющие на уровень риска при выполнении определенного вида деятельности. При количественной оценке риска определяется вероятность наступления того или иного риска, и размеры страховых премий. Процесс анализа рисков, принятие рисков на страхование (перестрахование) или отклонение, включающий их оценку, классификацию на страхуемые или нестрахуемые, определение сроков, условий и размеров покрытия, расчет размеров премии называется андеррайтингом. Андеррайтинг в личном страховании производится на основе таких критериев как пол, возраст, профессия клиента, образ его жизни, привычки, состояние здоровья, финансовое положение. На основании полученной информации андеррайтер принимает решение об условиях принятия клиента на страхование.

Чтобы рассчитать страховую премию, страховщику нужно как можно точнее оценить уровень риска, т.е. вероятность страхового случая. Для этого потенциальных клиентов нужно разделить на как можно более однородные, с точки зрения вероятности страхового случая, группы. Этот процесс называется классификацией рисков. Классификация при анализе статистических данных ограничена объемом данных – очень подробная классификация приведет к малым группам, для которых статистическая погрешность будет неприемлемо велика. Кроме того, классификация ограничена наличием информации о влияющих на наступление страхового события факторах. По результатам анализа готовится руководство по андеррайтингу, на основе которого проводится классификация потенциальных клиентов в соответствии с уровнем риска, который они представляют для страховой компании.

Основной задачей актуариев страховых компаний являются расчеты рисков в моделях страхования, особую проблему вызывают именно модели страхования жизни, так как на продолжительность жизни человека влияет большое количество факторов. В данной работе сделана попытка создания аналитической функции законов смертности, которые использованы затем для расчетов рисков.

Простейший закон смертности предложил де Муавр (1729 г.), по его предположению время жизни равномерно распределено на интервале $(0; \omega)$: $f(x) = \frac{1}{\omega}$, где ω – предельный возраст. Таким образом, в модели де Муавра:

$$F(x) = \frac{x}{\omega}, \quad s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \quad \mu_x = \frac{1}{\omega - x} \quad 0 < x < \omega,$$

В модели Гомпертца (1825 г.) интенсивность смертности приближается показательной функцией: $\mu_x = \beta e^{\alpha x}$. Таким образом, в модели Гомпертца:

$$f(x) = \beta \exp \left[\alpha x - \frac{\beta(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha} \right],$$

$$s(x) = \exp \left[-\frac{\beta(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha} \right]$$

где $\alpha > \beta > 0$ - некие параметры.

Мейкхам (1860 г.) обобщил предыдущую модель, прибавив к интенсивности смертности, предложенной Гомпертцом, постоянную A , характеризующую риски для жизни, связанные с несчастными случаями (мало зависящими от возраста): $\mu_x = A + \beta e^{\alpha x}$.

Таким образом, в модели Мейкхама:

$$f(x) = [A + \beta e^{\alpha x}] \exp \left[-Ax - \frac{\beta(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha} \right],$$

$$s(x) = \exp \left[-Ax - \frac{\beta(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha} \right]$$

Вейбулл (1939г.) предложил приблизить интенсивность смертности более просто степенной функцией: $\mu_x = kx^n$. Тогда:

$$f(x) = kx^n \exp \left(-\frac{kx^{n+1}}{n+1} \right),$$

$$s(x) = \exp \left(-\frac{kx^{n+1}}{n+1} \right).$$

Здесь $f(x)$ – функция смертей, $s(x)$ – функция выживания, μ_x – интенсивность смертности. [1]

Используя статистические данные, полученные с сайта stat.gov.kz, с помощью метода наименьших квадратов (МНК), рассчитаем параметры аналитических законов, для того, чтобы использовать их в дальнейших расчетах. Результаты расчетов представлены ниже, в таблице. Рассматриваются отдельно данные о мужчинах и женщинах в возрасте от 0 до 85 лет.

Таблица 1
Значения параметров аналитических законов

Законы		$s(x) = e^{\int_0^x \mu_u du}$	$f(x) = \mu_x s(x)$
Гомпертца	Муж.	$e^{\int_0^x 0,00524e^{0,63705u} du}$	$0,00524e^{0,63705x} e^{\int_0^x 0,00524e^{0,63705u} du}$
	Жен.	$e^{\int_0^x 0,000233e^{0,6068u} du}$	$0,000233e^{0,6068x} e^{\int_0^x 0,000233e^{0,6068u} du}$
Мейкхама	Муж.	$e^{\int_0^x 0,00146 + 0,000634e^{0,6468u} du}$	$0,00146 + 0,000634e^{0,6468x} e^{\int_0^x 0,00146 + 0,000634e^{0,6468u} du}$
	Жен.	$e^{\int_0^x 0,00377 + 0,00045e^{0,6468u} du}$	$0,00377 + 0,00045e^{0,6468x} e^{\int_0^x 0,00377 + 0,00045e^{0,6468u} du}$
Вейбулла	Муж.	$e^{\int_0^x 0,00088u^{1,299897} du}$	$0,00088x^{1,299897} e^{\int_0^x 0,00088u^{1,299897} du}$
	Жен.	$e^{\int_0^x 0,000576u^{1,200818} du}$	$0,000576x^{1,200818} e^{\int_0^x 0,000576u^{1,200818} du}$

График 1

Интенсивность смертности для мужчин



График 2

Интенсивность смертности для женщин



Исследуя модули отклонения фактических данных от найденных с использованием приведенных функций видим, что ни один закон не описывает достаточно хорошо интенсивность смертности на всем возрастном промежутке.

Проведя необходимые исследования, пришли к выводу, что на разных возрастных интервалах интенсивность смертности следует приближать разными законами смертности или одним законом с различными параметрами. Интенсивность смертности для мужчин:

$$\mu_x = \begin{cases} A + Be^{\alpha x}, & x \in (1;3) \\ Be^{\alpha x}, & x \in (4;21) \\ A + Be^{\alpha x}, & x \in (22;61) \\ kx^n, & x \in (62;71) \\ A + Be^{\alpha x}, & x \in (72;82) \\ kx^n, & x \in (83;85) \end{cases}$$

Интенсивность смертности для женщин:

$$\mu_x = \begin{cases} A + Be^{\alpha x}, & x \in (1;3) \\ kx^n, & x \in (4;6) \\ Be^{\alpha x}, & x \in (7;27) \\ A + Be^{\alpha x}, & x \in (28;46) \\ Be^{\alpha x}, & x \in (47;51) \\ kx^n, & x \in (52;58) \\ Be^{\alpha x}, & x \in (59;85) \end{cases}$$

Модели страхования жизни условно делятся на два типа в зависимости, принимается ли в расчет доход от инвестированных премий, если да, то мы говорим о долгосрочном страховании. В противном случае речь идет о краткосрочном страховании жизни. В данном исследовании рассматривается долгосрочное страхование.

Теория долгосрочного страхования в основном опирается на теорию о сложных процентах. В данном исследовании будем предполагать, что интенсивность процентов δ не меняется с течением времени, $i = e^\delta - 1$ будет обозначать эффективную годовую ставку, $v = \frac{1}{1+i}$ – коэффициент дисконтирования.

Долгосрочное страхование можно разделить на две большие группы: непрерывное и дискретное страхование относительно момента выплаты страховой суммы. Если страховая сумма выплачивается в момент смерти застрахованного, то страхование называется непрерывным, если страховая сумма выплачивается в следующий после наступления страхового случая день рождения застрахованного, то страхование называется дискретным. Величина страхового возмещения $\tau(t)$, как правило фиксирована, но в ряде случаев величина возмещения может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от момента ее выплаты. По этой причине введем функцию b_t , которая показывает зависимость страховой выплаты от момента смерти застрахованного - t .

Рассмотрим некоторые виды страхования с фиксированной страховой суммой $b = 1$:

Пожизненное страхование (whole life insurance): $\tau(t) = t, b_t = 1$

n-летнее чисто накопительное страхование (n-year pure endowment insurance):

$$\tau(t) = t \quad b_t = \begin{cases} 1, & t > n \\ 0, & t \leq n \end{cases}$$

n-летнее временное страхование жизни (n-year term life insurance):

$$\tau(t) = t \quad b_t = \begin{cases} 1, & t \leq n \\ 0, & t > n \end{cases}$$

n-летнее смешанное страхование (n-year endowment insurance):

$$\tau(t) = \min(t, n), b_t = 1$$

Пожизненное страхование, отсроченное на m лет (m-year deferred whole life insurance):

$$\tau(t) = t \quad b_t = \begin{cases} 0, & t \leq m \\ 1, & t > m \end{cases}$$

n-летнее временное страхование, отсроченное на m лет:

$$\tau(t) = t \quad b_t = \begin{cases} 0, & t \leq m \\ 1, & m < t \leq m + n \\ 0, & t > m + n \end{cases}$$

Опишем динамику активов компании с течением времени. На промежутке $[\tau_{(k)}, \tau_{(k+1)})$ активы компании возрастают по закону: $u(\tau_{(k)} + t) = u(\tau_{(k)})(1 + i)^t$. А в момент $\tau_{(k+1)}$ активы компании уменьшаются по закону: $u(\tau_{(k+1)} + 0) = u(\tau_{(k+1)} - 0) - b_{(k+1)}$. Если в какой то момент τ_k будет выполнено следующее неравенство- $u(\tau_{(k)} - 0) < b_{(k)}$, то мы говорим о разорении компании. Опишем поведение активов компании, соответствующие не разорению: $\sum_{k=1}^N Z_k \leq u_0$, и разорению: $\sum_{k=1}^N Z_k > u_0$ где $Z_k = b_k v^{\tau_k}$ - величина выплаты по -му договору к моменту времени $t_0 = 0$.

Страховая премия имеет фиксированную структуру, и каждая ее компонента обеспечивает определенную функцию. Большая часть премии уходит на формирования страхового фонда, из которого производятся выплаты по произошедшим страховым случаям. Страховая премия, которую уплачивает страхователь, называется брутто-премия. Ее структура представлена ниже.

Разовая нетто-премия для любого вида непрерывного страхования описываемого $\tau(t)$ и b_t рассчитывается следующей формулой: $A = EZ$, где $Z = b_{T_x} v^{\tau(T_x)} = b_{T_x} e^{-\delta \tau(T_x)}$ - величина страхового возмещения приведенная на момент заключения договора, а x - возраст застрахованного на этот момент. Для конкретных видов страхования модель может быть упрощена и конкретизирована. Рассмотрим расчеты для определенных видов долгосрочного непрерывного страхования.[3] Обозначим через Z_x величину страхового возмещения приведенную на момент заключения договора для застрахованного в возрасте x лет, A_x -разовую нетто-премию для застрахованного в возрасте x лет.[4]

Пожизненное страхование:

$$Z_x = v^{T_x} = e^{-\delta T_x},$$

$$A_x = EZ_x = E e^{-\delta T_x},$$

Как мы видим, A_x является преобразованием Лапласа остаточного времени T_x в кеб. В силу общих теорем теории вероятностей нетто-премию можно выразить через характеристики времени жизни следующим образом:

$$A_x = \int_0^{\infty} v^t f_x(t) dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^{\infty} v^t f(t) dt$$

n-летнее чисто накопительное страхование :

$$Z_{x:n} = \begin{cases} 0, & T_x \leq n \\ v^n, & T_x > n \end{cases}, A_{x:n} = v^n \quad {}_t p_x,$$

где

T_x - остаточное время жизни застрахованного в возрасте x лет;

$Z_{x:n}$ - величина страхового возмещения, приведенная на момент заключения договора n-летнего чисто накопительного страхования для застрахованного в возрасте x лет;

$A_{x:n}$ - разовая нетто-премия для n-летнего чисто накопительного страхования, застрахованного в возрасте x лет.[5]

n-летнее страхование жизни:

$$Z_{x:n} = \begin{cases} 0, & T_x > n \\ v^{T_x}, & T_x \leq n \end{cases},$$

$$A_{x:n} = \int_0^n v^t f_x(t) dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^n v^t f(t) dt$$

n-летнее смешанное страхование:

$$Z_{x:n} = \begin{cases} v^n, & T_x > n \\ v^{T_x}, & T_x \leq n \end{cases}, \quad A_{x:n} = EZ_{x:n}$$

*Пожизненное страхование, отсроченное на *m* лет:*

$${}_mZ_x = \begin{cases} 0, & T_x \leq m \\ v^{T_x}, & T_x > m \end{cases}$$

$${}_mA_x = \int_m^{\infty} v^t f_x(t) dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_m^{\infty} v^t f(t) dt$$

где

${}_mZ_x$ - величина страхового возмещения, приведенная на момент заключения для пожизненного страхования, отсроченного на *m* лет застрахованного в возрасте *x* лет;

${}_mA_x$ - разовая нетто-премия для пожизненного страхования, отсроченного на *m* лет, застрахованного в возрасте *x* лет.[6]

Рассчитаем разовые нетто-премии при 1-5-10-летнем смешанном страховании мужчин в возрасте *x*=18,20,55 лет с выплатой страховой суммы в конце года смерти. Эффективная годовая процентная ставка *i* = 5%.

Таблица 2
Разовые нетто-премии

	1	5	10
18	0,907091	0,784162	0,616726
40	0,907293	0,784543	0,622791
55	0,907845	0,791422	0,647534

Рассчитаем разовые нетто-премии при 1-5-10-летнем смешанном страховании женщин в возрасте *x*=18,20,55 лет с выплатой страховой суммы в конце года смерти. Эффективная годовая процентная ставка *i* = 5%.[7]

Таблица 3
Разовые нетто-премии

	1	5	10
18	0,907055	0,783778	0,614952
40	0,907121	0,784434	0,617924
55	0,907368	0,786818	0,628103

Список использованных источников

1. Г.И.Фалин. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. 3-е издание М.: АНКЛ 2007.304с.
2. И.И.Елисеева. Практикум по эконометрике М.: Финансы и статистика 2003. 192с
3. И. Елисеева [и др.] ; под ред. И. И. Елисеевой. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 449 с.
4. Н.Бауэрс. Актуарная математика. Под ред.В.К.Малиновского-М.: Янус-К 2001. 656с.
5. Г.И.Фалин, А.И.Фалин Актуарная математика в задачах, 2-е издание М.: Физматлит 2004. 240с.
6. Г.И.Фалин Математический анализ рисков в страховании Москва: Российский юридический издательский дом 1994.
7. Адамчук Н.Г. Экономические основы страхования жизни. Страховое дело № 9–2003, с. 26–38

**ВЛИЯНИЕ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ДИНАМИКУ КАТКА
СО СМЕЩЕННЫМ ЦЕНТРОМ МАСС
Берсүгір М.Ә., Алимжанов М.Д., Айқын Айбек**

Динамика катка движущегося по вибрирующей поверхности, в общем случае рассматривались многими авторами, наиболее существенные результаты достигнуты в работе Блехмана И.И. [1]. В этих работах учитывались малые углы колебания, что вносит значительные упрощения в динамику поведения системы.

В рассматриваемой работе получены аналитические решения нелинейных дифференциальных уравнений движения катка методом частичной дискретизации, разработанного профессором А.Н.Тюреходжаевым [2].

Рассмотрим движение катка происходящего под действием силы тяжести mg и реакции поверхности N приложенной в точке P . Будем считать, что центр тяжести катка не совпадает с его геометрическим центром (Рис. 1).

Пусть плоскость совершает поступательные гармонические колебания по закону $\xi = A \sin(\omega t)$, направленные под углом β к вибрирующей поверхности.

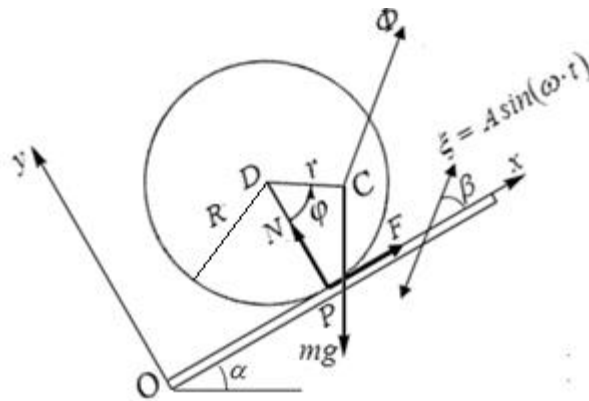


Рис. 1. Схема движения катка по шероховатой наклонной вибрирующей поверхности

Здесь: A, ω – амплитуда и частота колебаний, t – время.

Инерционные свойства катка характеризуются массой m и моментом инерции J_C относительно оси проходящей через центр масс C . Положение катка будем задавать координатами центра масс x_C, y_C в системе координат Oxy , связанной с вибрирующей поверхностью и углом поворота φ .

Будем считать, что трение скольжения F (трением качения пренебрегаем) подчиняется закону Амонтона-Кулона:

$$F \leq fN,$$

где f – коэффициент трения скольжения.

В данной работе будем рассматривать безотрывное движение катка.

В относительном движении ко всем действующим силам необходимо добавить переносную силу инерции:

$$\Phi = m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t).$$

Относительное движение катка описывается системой дифференциальных уравнений, вытекающих из общих теорем динамики:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_C &= F + \Phi \cos \beta - mg \sin \alpha, \\
m\ddot{y}_C &= N - mg \cos \alpha + \Phi \sin \beta, \\
J_C \ddot{\varphi} &= -F(R - r \cos \varphi) + Nr \sin \varphi,
\end{aligned} \tag{1}$$

где R – радиус катка; r – смещение центра масс катка от его геометрического центра; g – ускорения свободного падения.

Систему дифференциальных уравнений (1) рассмотрим совместно с начальными условиями:

$$t = 0: \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0. \tag{2}$$

Из условия отсутствия скольжения следует, что во все время движения должны выполняться равенства:

$$\dot{x}_C = (R + r \cos \varphi) \dot{\varphi}; \quad \dot{y}_C = r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$\ddot{x}_C = (R + r \cos \varphi) \ddot{\varphi} - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2; \quad \ddot{y}_C = r \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2. \tag{3}$$

Из первых двух уравнений (1) найдем составляющие реакций поверхности в зависимости от φ , $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\begin{aligned}
N &= mr(\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2) + mg \cos \alpha - m A \omega^2 \sin(\omega t) \sin \beta, \\
F &= m[(R + r \cos \varphi) \ddot{\varphi} - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2] - m A \omega^2 \sin(\omega t) \cos \beta + mg \sin \alpha.
\end{aligned} \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в третье уравнение, системы дифференциальных уравнений (1), придем к уравнению, описывающее изменение угла поворота катка в виде:

$$\ddot{\varphi} - \frac{r R \sin \varphi}{\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2)} \dot{\varphi}^2 - \frac{A \omega^2 \sin(\omega t) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi)] - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi)]}{\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2)} = 0. \tag{5}$$

Для решения уравнение (5), используем метод частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений [2]. Тогда уравнение (5) примет вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left\langle \left\{ r R \sin \varphi(t_i) \dot{\varphi}^2(t_i) + A \omega^2 \sin(\omega t_i) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_i))] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_i))] \right\} \delta(t - t_i) - \left\{ r R \sin \varphi(t_{i+1}) \dot{\varphi}^2(t_{i+1}) + A \omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_{i+1}))] - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_{i+1}))] \right\} \delta(t - t_{i+1}) \right\rangle,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\delta(t)$ – дельта функция Дирака.

Дважды интегрируя выражения (6) получим его общее решение в виде:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = & \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left\langle \left\{ r R \sin \varphi(t_i) \dot{\varphi}^2(t_i) + A \omega^2 \sin(\omega t_i) + [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_i))] - \right. \right. \\
& - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_i))] \left. \right\} (t - t_i) H(t - t_i) - \left\{ r R \sin \varphi(t_{i+1}) \dot{\varphi}^2(t_{i+1}) + A \omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \times \right. \\
& \times [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_{i+1}))] - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_{i+1}))] \left. \right\} (t - t_{i+1}) H(t - t_{i+1}) \left. \right\rangle + C_1 t + C_2,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда; C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Используя начальные условия (2), представим решение в виде:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = & \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left\langle \left\{ r R \sin \varphi(t_i) \dot{\varphi}^2(t_i) + A \omega^2 \sin(\omega t_i) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_i))] - \right. \right. \\
& - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_i))] \left. \right\} (t - t_i) H(t - t_i) - \left\{ r R \sin \varphi(t_{i+1}) \dot{\varphi}^2(t_{i+1}) + A \omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \times \right. \\
& \times [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_{i+1}))] - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_{i+1}))] \left. \right\} (t - t_{i+1}) H(t - t_{i+1}) \left. \right\rangle + \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Аналитические выражения угла поворота $\varphi(t_j)$ и угловой скорости $\dot{\varphi}(t_j)$ катка в моменты времени t_j находим из следующих алгебраических уравнений:

при $j = 1$;

$$\varphi(t_1) = \dot{\varphi}_0 t_1 + \varphi_0,$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(t_1) = & \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} (t_1 + t_2) \left\{ r R \sin \varphi(t_1) \dot{\varphi}^2(t_1) + A \omega^2 \sin(\omega t_1) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_1))] - \right. \\
& - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_1))] \left. \right\} + \dot{\varphi}_0,
\end{aligned}$$

при $j = 2$;

$$\begin{aligned}
\varphi(t_2) = & \frac{1}{2 \left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2) \right]} (t_1 + t_2) \left\{ r R \sin \varphi(t_1) \dot{\varphi}^2(t_1) + A \omega^2 \sin(\omega t_1) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_1))] - \right. \\
& - g [R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_1))] \left. \right\} (t_2 - t_1) + \dot{\varphi}_0 t_2 + \varphi_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t_2) = & \frac{1}{2\left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2)\right]}(t_1 + t_2) \left\{ rR \sin \varphi(t_1) \dot{\varphi}^2(t_1) + A\omega^2 \sin(\omega t_1) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_1))] - \right. \\ & \left. - g[R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_1))] \right\} + \frac{1}{2\left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2)\right]}(t_3 - t_1) \left\{ rR \sin \varphi(t_2) \dot{\varphi}^2(t_2) + A\omega^2 \sin(\omega t_2) \times \right. \\ & \left. \times [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_2))] - g[R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_2))] \right\} + \dot{\varphi}_0,\end{aligned}$$

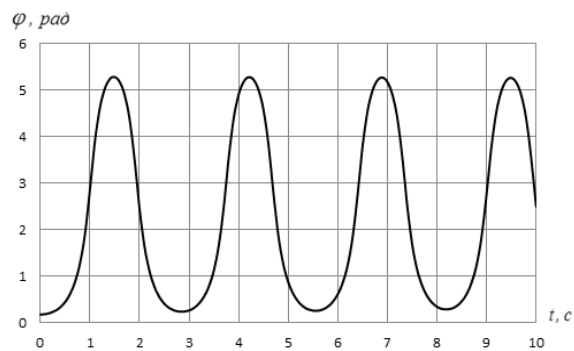
при $j = \overline{3, n}$;

$$\begin{aligned}\varphi(t_j) = & \frac{1}{2\left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2)\right]}(t_1 + t_2) \left\{ rR \sin \varphi(t_1) \dot{\varphi}^2(t_1) + A\omega^2 \sin(\omega t_1) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_1))] - \right. \\ & \left. - g[R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_1))] \right\} (t_j - t_1) + \frac{1}{2\left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2)\right]} \sum_{i=2}^j (t_{i+1} - t_{i-1}) \left\{ rR \sin \varphi(t_i) \dot{\varphi}^2(t_i) + \right. \\ & \left. + A\omega^2 \sin(\omega t_i) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_i))] - g[R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_i))] \right\} (t_j - t_i) + \dot{\varphi}_0 t_j + \varphi_0,\end{aligned}\tag{20}$$

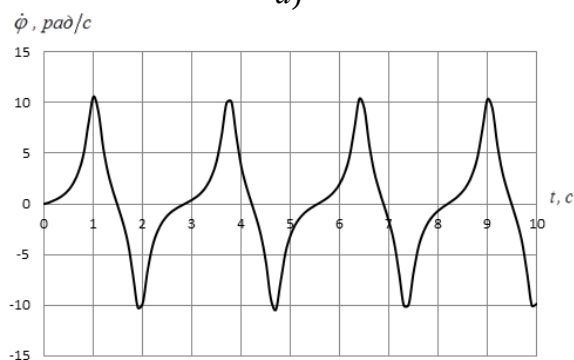
$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t_j) = & \frac{1}{2\left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2)\right]}(t_1 + t_2) \left\{ rR \sin \varphi(t_1) \dot{\varphi}^2(t_1) + A\omega^2 \sin(\omega t_1) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_1))] - \right. \\ & \left. - g[R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_1))] \right\} + \frac{1}{2\left[\frac{J_C}{m} + (R^2 - r^2)\right]} \sum_{i=2}^j (t_{i+1} - t_{i-1}) \left\{ rR \sin \varphi(t_i) \dot{\varphi}^2(t_i) + \right. \\ & \left. + A\omega^2 \sin(\omega t_i) [R \cos \beta - r \cos(\beta + \varphi(t_i))] - g[R \sin \alpha - r \sin(\alpha + \varphi(t_i))] \right\} (t_j - t_i) + \dot{\varphi}_0.\end{aligned}$$

На рис. 2, 3 приведены кривые изменения угла поворота φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$ катка для конкретных значений параметров $m = 50 \text{ кг}$, $\beta = 0,524 \text{ рад.}$, $\alpha = 0,105 \text{ рад.}$, $A = 0,0005 \text{ м}$, $\omega = 1 \text{ рад/с}$, $\varphi(0) = 0,175 \text{ рад.}$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Из рис. 1 видно что, при заданных параметрах систем угол размаха колебаний составляет около $5,3 \text{ рад}$, период колебаний находится в пределах $2,5 \text{ с}$. Угловая скорость колебания катка при тех же параметрах системы имеет полуразмахи свыше 10 рад/с . Период этих же колебаний находится в пределах $2,8 \text{ с}$. При этом максимальные значения угла колебаний φ соответствуют минимальным значениям угловой скорости $\dot{\varphi}$. Это обстоятельство подтверждает правоту исследований и согласуется с общей теорией колебательных процессов в механике.



a)

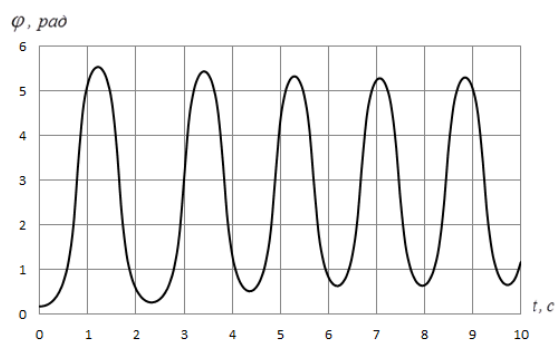


б)

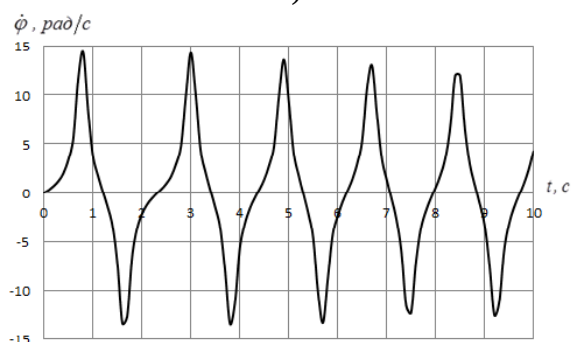
$$R = 0,25 \text{ м}, \quad r = 0,15 \text{ м}$$

Рис. 2. Кривые изменения: а) угла поворота φ ; б) угловой скорости $\dot{\varphi}$ катка

На рис. 2 представлены графики угла поворота φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$ катка при смещении центра масс от его геометрического центра на величину $r = 0,2 \text{ м}$. Параметры системы останутся неизменными.



a)



б)

$$R = 0,25 \text{ м}, \quad r = 0,2 \text{ м}$$

Рис. 3. Кривые изменения: а) угла поворота φ ; б) угловой скорости $\dot{\varphi}$ катка

Из графиков следует, что при смещении центра масс, происходит изменение угла размаха колебаний до $5,5 \text{ рад}$, период уменьшается и составляет $1,8 \text{ с}$. Угловая скорость колебания катка имеет полуразмахи свыше 14 рад/с . Период составляет $1,9 \text{ с}$.

Из анализа кривых изменения угла поворота φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$ следуют, что в целом характер колебаний имеет тенденцию к затуханию. Кроме этого полученные графики показывают, что при увеличении смещения центра масс катка от его геометрического центра, приводит к увеличению угла размаха колебаний. Однако период этих колебаний снижается.

Список используемых источников

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука. 1994.
2. Tyurehodzhaev A.N. *Analytical solutions of nonlinear equations and differential equations with variable coefficients*. Proceedings of the «Actual Problems of Mechanics and Engineering» IV International Scientific Conference, II, Almaty, 40-57 (2014).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЛАДКОГО СОПРЯЖЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ

Бостанов Б.О., Мухамбеталина Д.Ж., Исенова Ж.Ж.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: bostanov_bayandy@mail.ru

Рассматривается движение тела по траектории комбинированной формы, состоящей из полудуг окружности и параболы (коники). В месте сопряжения нет гладкости соединения, т.е. нет общей касательной линии, возникает скачок по скорости. Для того чтобы не было скачка предлагается вставить между дугами переходной участок, математической моделью которого является коника [1-2].

Пусть для движения некоторой материальной точки требуется формировать гладкую комбинированную беговую дорожку (траекторию), состоящей из дуг окружности

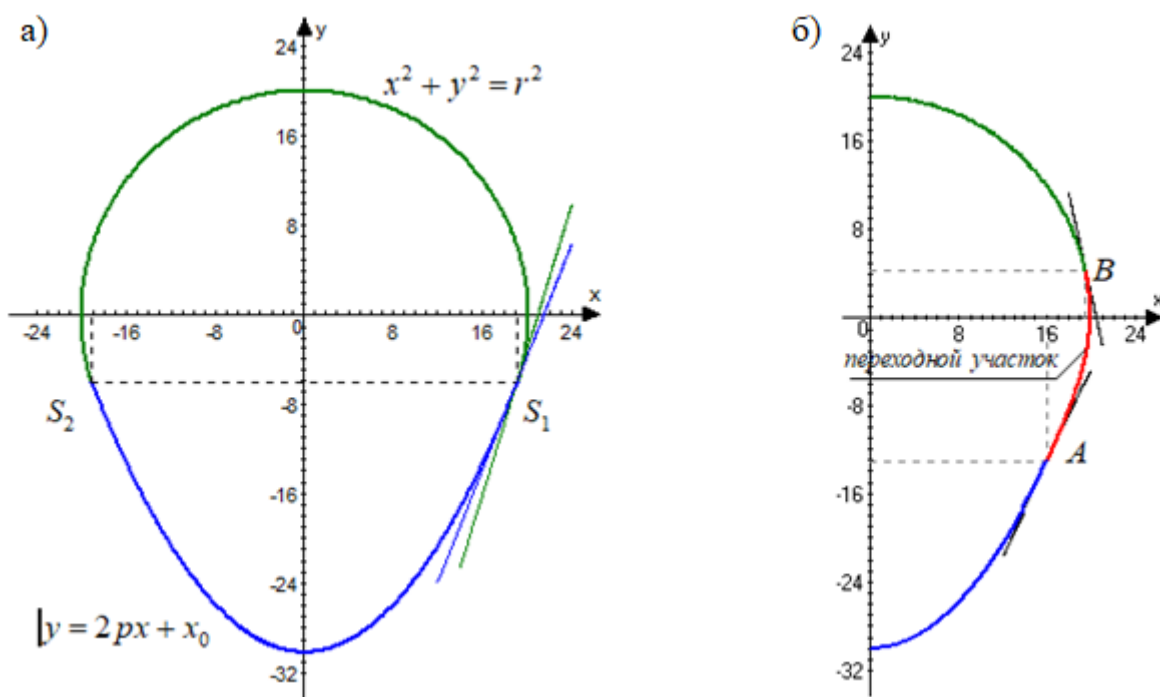


Рис.1 Комбинированная траектория и переходной участок

$x^2 + y^2 = r^2 = 20^2$ и параболы $y = 0.066x^2 - 30$. Точками сопряжения являются $S_1(19.1135; -5.8886)$, $S_2(-19.1135; -5.8886)$ (рис.1а). Рассмотрим правую часть траектории от оси Oy и проведем касательные:

$$L_{S_1r}: y = 3.2458x - 67.9277;$$

$$L_{S_2r}: y = 2.5223x - 54.1115.$$

Таким образом, в точке стыковки S_1 касательные не совпадают, что приведет к прерывному, не гладкому движению по траектории.

Всякая невырожденная кривая второго порядка может быть получена как сечение конуса, поэтому такие кривые называют коническими сечениями или просто кониками. Эллипс и окружность представляют собой замкнутые коники [1].

Ролик бегунка вибровозбудителя совершает движение по комбинированной беговой дорожке, составленной из дуг коник с общей касательной в точках соединения. При переходе из одной части в другую, в точках соединения возникает разрыв кривизны, вызывающий скачок центробежной силы. Для того, чтобы обеспечить переход без скачка необходимо между ними вставить переходный участок в виде дуги кривой, удовлетворяющей условиям (рис. 1 б):

а) дуга должна проходить через точки соединения A и B ;

б) соединяющая и соединяемая части должны иметь одинаковую непрерывную первую производную в точках соединения (в этой точке скорости должны быть равными);

в) соединяющая и соединяемая части должны иметь одинаковую непрерывную вторую производную в точках соединения (в этой точке радиусы кривизны должны быть равными);

Составные кривые в технике получили название обводов, в математике они известны как сплайны. Термин «сплайн» происходит от английского слова *spline* – что означает гибкую полосу стали, которую применяли инженеры для проведения плавных кривых, например, для построения обводов кораблей и самолетов. Математически сплайн – это гладкая кривая, которая строится с использованием дуг и проходит через две или более контрольных точек, управляющих формой сплайна. Основной характеристикой сплайна является гладкость, которая определяется числом совпавших производных в точках соединения. Соединение, удовлетворяющее условиям а) и б), соответствует первому порядку гладкости (совпадают только первые производные). Соединение, удовлетворяющее всем трем условиям а), б) и в), соответствует второму порядку гладкости. Гладкость второго порядка называется плавностью [2].

Если вдоль сплайна совершается механическое движение, то непрерывность второй производной предполагает непрерывность ускорения и, следовательно, отсутствие резких изменений приложенной силы. Будем рассматривать задачу проведения гладкой кривой – коники – по заданным граничным точкам.

Общий вид коники описывается квадратичной формой

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Делим все члены квадратичной формы на свободный коэффициент $a_{33} \neq 0$ и в итоге получим пять неизвестных коэффициентов и константу 1. Решая систему из пяти линейных уравнений с пятью неизвестными, получим каждый из коэффициентов $a'_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{33}}$.

Р.А. Лайминг (Liming R.A) применил метод, основанный на использовании дуг коник, удовлетворяющих условиям сопряжения и касания, который избавляет от необходимости решения системы из пяти линейных уравнений [3].

Пусть два конических сечения заданы уравнениями $S_1(x, y) = 0$ и $S_2(x, y) = 0$, то уравнение $(1 - \lambda)S_1 + \lambda S_2 = 0$ определяет еще одну конику, проходящую через точки пересечения кривых $S_1(x, y) = 0$ и для $S_2(x, y) = 0$, при любых значениях параметра λ .

Изменяя величину параметра λ получим пучок конических сечений, два из которых определяются уравнениями $S_1 = 0$ (при $\lambda = 0$) и для $S_2 = 0$ (при $\lambda = 1$) (рис. 2а).

Чтобы найти величину параметра λ в заданная некоторая точка P , лежащая на конике $(1 - \lambda)S_1 + \lambda S_2 = 0$. Если выбранная точка имеет координаты x_P и y_P , то параметр определяется по формуле

$$\lambda = \frac{S_1(x_P, y_P)}{[S_1(x_P, y_P) - S_2(x_P, y_P)]}.$$

Возьмем две прямые $L_1 = (a_1x + b_1y + c_1) = 0$ и $L_2 = (a_2x + b_2y + c_2) = 0$. Тогда $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ или $L_1 \cdot L_2 = 0$ является уравнением второго порядка, которому удовлетворяют все точки, лежащие на паре прямых $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$. Это уравнение фактически определяет вырожденное коническое сечение, получаемое в результате рассечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину параллельно оси.

Итак, уравнение $(1 - \lambda) \cdot L_1 \cdot L_2 + \lambda \cdot L_3 \cdot L_4 = 0$ представляет семейство или пучок

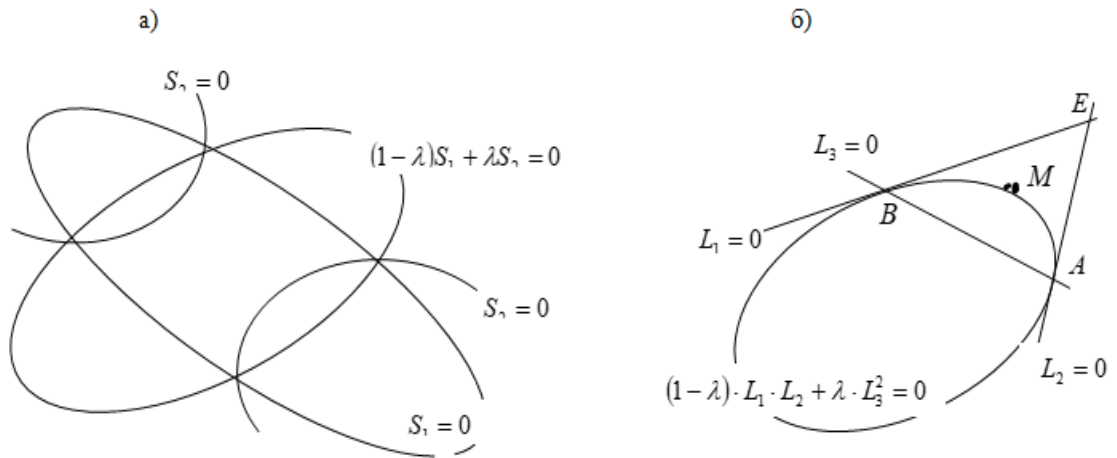


Рис. 2. Задания коник

конических сечений, проходящих через четыре точки пересечения двух пар прямых линий (L_1, L_2) и (L_3, L_4) . Задавая произвольную пятую точку, можно определить значение λ .

Лайминг показал, что применяя этот метод, можно найти уравнение конического сечения, имеющее две заданные касательные в двух точках и проходящее через третью точку.

Если прямые $L_3 = 0$ и $L_4 = 0$ совпадают, то получим уравнение

$$(1 - \lambda) \cdot L_1 \cdot L_2 + \lambda \cdot L_3^2 = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) представляет собой пучок конических сечений, проходящих через точки A и B , здесь прямая $L_2 = 0$ является касательной в точке A , а прямая $L_1 = 0$ - касательной в точке B , прямая $L_3 = 0$ хордой, соединяющей точки A и B (рис.26).

Параметр λ определяется заданием (выбором) точки M , если точка M имеет координаты x_M и y_M , тогда

$$\lambda = \frac{L_1(x_M, y_M)L_2(x_M, y_M)}{L_1(x_M, y_M)L_2(x_M, y_M) - L_3^2(x_M, y_M)} \quad (2)$$

Таким образом, коническое сечение переходного участка беговой дорожки определяется четырьмя точками [4]:

- двумя точками соединения – точками касания A и B ;
- точкой пересечения касательных E ;
- некоторой точкой M .

Выбирая точку M внутри базисного треугольника ΔAEB мы определяем непрерывную кривую первого порядка гладкости между точками соединения A и B :

- если точка M делит пополам прямую, соединяющую середины отрезков касательных BE и AE , то получаем параболу;
- если точка M находится между этой параболой и прямой AB , то получаем эллипс;
- если точка M находится за пределами параболы в сторону точки E , то получаем гиперболу.

Покажем на примере комбинированной траектории, состоящей из дуги $x^2 + y^2 = r^2 = 20^2$ окружности и дуги $y = 0.066x^2 - 30$ параболы, создание переходной коники, обеспечивающая соединение гладкости первого порядка.

Произвольно выберем некоторый участок AB , где необходимо вставить переходную кривую.

Пусть $A(16; -13.104)$ и $B(19.5329; 4.2972)$. Точка A лежит на параболе, а точка B - на окружности.

Проведем касательные через выбранные точки A и B , а также прямую соединяющую эти точки. Тогда

$$\begin{aligned} L_{A\tau}: y &= 2.112x - 46.896, \\ L_{B\tau}: y &= -4.5455x + 93.0841, \\ L_{AB}: y &= 4.9255x - 91.9116. \end{aligned}$$

Точка пересечения касательных - $T(21.0259; -2.4892)$.

В результате получаем базисный треугольник ΔATB , образованный и касательных $L_{A\tau}$, $L_{B\tau}$ и хорды L_{AB} . Согласно методу Лайминга, дуга искомой переходной кривой лежит внутри базисного треугольника, причем стороны AT и BT будут касательными для переходной кривой в соответствующих точках.

Уравнение переходной кривой получим в виде уравнении Лайминга:

$$F(x, y) = (1 - \lambda)(2.112x - y - 46.896)(-4.5455x + 93.0841) + \lambda(4.9255x - y - 91.9116)^2 = 0.$$

Теперь выберем внутри базисного треугольника некоторую точку M с координатами $x_M = 19$ и $y_M = -4$ (рис.3а). Далее подставляя значения координат x_M , y_M в выражение (2) найдем коэффициент λ , тогда

$$\lambda = \frac{(2.112x - y - 46.896)(-4.5455x + 93.0841)}{(2.112x - y - 46.896)(-4.5455x + 93.0841) - (4.9255x - y - 91.9116)^2} \Big|_{\substack{x=19 \\ y=-4}} = 0.4853$$

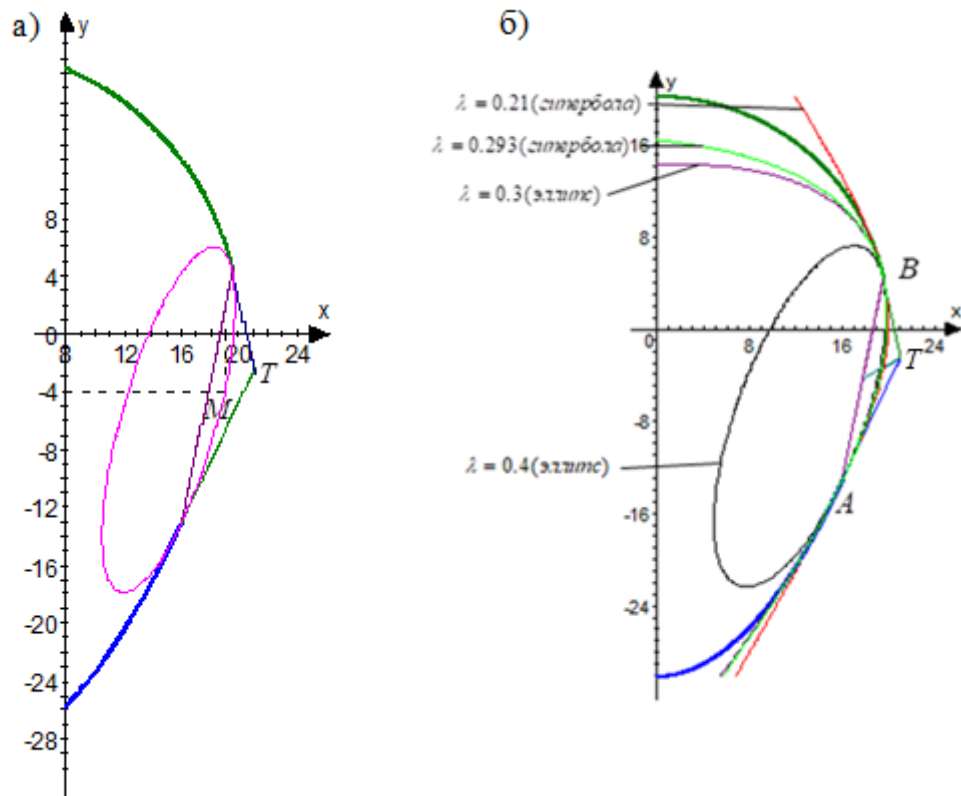


Рис. 3. Пучок коник первого порядка гладкости

Следовательно, искомое уравнение примет вид

$$(3) \quad 0.5147(2.112x - y - 46.896)(-4.5455x + 93.0841) + 0.4853(4.9255x - y - 91.9116)^2 = 0$$

Полученное уравнение – уравнение кривой второго порядка. Сделав математические преобразование определим, что уравнение представляет собой эллипс (рис.3а).

Таким образом, комбинированная траектория состоит из круговой и параболической дуги с промежуточным участком - дугой переходного эллипса (3), которая обеспечит гладкость сопряжения.

Выбирая точки M в разных местах внутри базисного треугольника, получаем разные значения для λ , в результате чего получим множество переходных кривых (коник). Исходя из поставленных условий, исследователь выберет необходимую переходную кривую.

На рис. 3б представлены различные варианты переходного участка.

Список используемых источников

1. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. –М.: МЦНМО, 2007. – 136 с.
2. Е.С. Темирбеков, М.В. Дудкин, Б.О. Бостанов. Теоретические исследования планетарных вибровозбудителей с различной формой беговой дорожки для дорожных катков. Монография. – Астана: ТОО «ЦСЭП Консалтинг», 2009. 178 с. , илл.
3. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве /пер. с англ. – М.: Мир, 1982. - 304 с.

УДК 519.83.65

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА

Букенов М.М., Азимова Д.Н., Жолмагамбетова Б.Р.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: Bukenov_M_M@mail.ru, Arfidea@mail.ru, Bakhytgulz@mail.ru

Рассмотрено применение метода фиктивных областей для среды Максвелла. Получены двусторонние оценки по малому параметру α сходимости приближенного решения к точному решению.

Ключевые слова: метод фиктивных областей, скорости-напряжения, малый параметр.

Рассмотрим динамическую задачу вязкоупругости построенную на основе модели Максвелла, в цилиндре $Q = \{D \times [0 \leq t \leq t_1]\}$, где $D \in R^3$ ограниченная односвязная область, с достаточно гладкой границей γ . Введем $\gamma_t = \gamma \times [0, t_1]$, векторы-столбцы деформаций и напряжений : $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23})^T$ и $\vec{\sigma} = (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23})^T$, символ Т означает транспонирование, вектор- столбец скоростей $\vec{v} = (v_1 v_2 v_3)^T$. Как показано в работе [1] постановку этой задачи в скоростях-напряжениях можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + R^* \vec{\sigma} = \vec{f}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}}{\partial t} - R \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$B \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + C \vec{\sigma} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}}{\partial t}, \quad (3)$$

Здесь $\vec{f}$ - вектор массовых сил, $B = B^T$ -симметричная, положительно-определенная матрица, зависящая от констант Ламе; $C = C^T$ симметричная, положительно-определенная матрица, зависящая от коэффициента вязкости θ , матрицы B, C – перестановочны, их вид приведен в работе [2] R -линейный матрично-дифференциальный оператор:

$$R = \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 & \nabla_1 & 0 & \nabla_3 \\ 0 & 0 & \nabla_3 & 0 & \nabla_1 & \nabla_2 \end{pmatrix}^T, \quad R^* = -R^T, \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3$$

Уравнение (1) выражает закон сохранения импульса, если объемная плотность $\rho \equiv 1$. Соотношение (2) является следствием соотношения перемещения - деформации:

$$\vec{\varepsilon} = R \vec{u},$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ – вектор перемещений. Векторы перемещений $\vec{u}$ и скорости $\vec{v}$ связаны соотношением $\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$. Соотношение (3) является уравнением состояния для вязкоупругой среды Максвелла. Решение системы (1)-(3) ищется в цилиндре Q при этом:

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{\varphi}(x), \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x, 0) = \vec{\psi}(x), \quad x \in D$$

и, соответственно

$$\vec{v}(x, 0) = \vec{\psi}(x), \quad \vec{\varepsilon}(x, 0) = R \vec{\varphi}(x) \quad (4)$$

Перемещения $\vec{u}(x, t)$ определяются из соотношения

$$\vec{u}(x, t) = \vec{\varphi}(x) + t \vec{\psi}(x) + \int_0^t (t-s) \vec{r}(x, s) ds, \quad \vec{r}(x) = -R^* \vec{\sigma}$$

На боковой поверхности цилиндра Q искомое решение удовлетворяет однородному краевому условию.

$$\sum_{k=1}^3 \sigma_{ik}(x, t) n_k = 0, \quad (x, t) \in \gamma_t, \quad (5)$$

Здесь $n_k = (n_1 n_2 n_3)^T$ - вектор нормали к γ

Нахождение начальных условий для $\bar{\sigma}(x, t)$ описано в работе [2].

Следуя [1] переформулируем задачу (1)-(5) в терминах напряжений, обозначим $\bar{F} = R\bar{f}$

$$B \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial t^2} + C \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} = -RR^* \bar{\sigma} + \bar{F}, \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}(x, 0) = \bar{g}(x), \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t}(x, 0) = \bar{p}(x), \quad (7)$$

Задачу (5)-(7) назовем задачей I

Для задачи I верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\bar{\sigma}(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $\bar{g}(x) \in W_2^1(D)$, $\bar{p}(x) \in L_2(D)$, $\bar{F}(x, t) \in L_2(Q)$, тогда существует решение задачи I и верна оценка.

$$\|\bar{\sigma}(x, t)\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_1 (\|\bar{F}\|_{L_2(Q)} + \int_0^{t_1} \|\bar{g}(x)\|_{W_2^1(D)} d\tau + \|\bar{p}(x)\|_{L_2(D)}), \quad (8)$$

Доказательство приведено в работе [3]

Всоответствии с методом фиктивных областей [5], [6], [3], [7] дополним исходную область D некоторой областью D_1 до составной области $D_0 = D \cup D_1$, с границей Γ , $\Gamma_t = \Gamma \times [0, t_1]$, $Q_1 = D_1 \times [0, t_1]$ и построим вспомогательную задачу

$$L_\alpha \bar{\sigma}^\alpha = \bar{F}, \quad (x, t) \in Q, \quad L_\alpha \bar{\sigma}^\alpha = 0, \quad (x, t) \in Q_1$$

$$\sum_{k=1}^3 (\bar{\sigma}^\alpha)_{jk} n_k = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_t, \quad \bar{\sigma}^\alpha(x, 0) = 0, \quad x \in D_1 \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}^\alpha(x, 0) = \bar{g}(x), \quad x \in D, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}^\alpha}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in D_1$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}^\alpha}{\partial t}(x, 0) = \bar{p}(x), \quad x \in D$$

$$\text{Здесь } L\bar{\sigma} = B\bar{\sigma}_{tt} + C\bar{\sigma}_t + A\bar{\sigma}, \quad A\bar{\sigma} = -RR^*\bar{\sigma},$$

$$L_\alpha \bar{\sigma}^\alpha = B\bar{\sigma}_{tt}^\alpha + C\bar{\sigma}_t^\alpha + A^\alpha \bar{\sigma}^\alpha,$$

$$A^\alpha = \begin{cases} 1, & x \in D \\ \alpha^{-2}, & x \in D_1 \end{cases}, \quad \alpha > 0 - \text{малый параметр.}$$

На кривой разрыва коэффициентов γ_t ставим условия согласования

$$\bar{\sigma}^\alpha|_{\gamma_t}^+ = \bar{\sigma}^\alpha|_{\gamma_t}^-, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}^\alpha}{\partial n}|_{\gamma_t}^+ = \frac{M}{\alpha} \frac{\partial \bar{\sigma}^\alpha}{\partial n}|_{\gamma_t}^-, \quad (10)$$

Знаки "+" или "-" означают стремления предельного значения функции изнутри или извне к границе γ_t . Параметр M принимает значение 1 или -1. Введем в рассмотрения следующие ряды:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{V}_k, \quad \text{в } Q, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \bar{W}_k, \quad \text{в } Q_1, \quad (11)$$

Если подставить (11) в (9), то получим соотношения для определения $\bar{V}_k$ и $\bar{W}_k$:

$$L\bar{V}_0 = \bar{F}, \quad (x, t) \in Q, \quad L_\alpha \bar{W}_1 = 0, \quad (x, t) \in Q_1$$

$$\bar{V}_0(x, 0) = \bar{g}(x), \quad \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial t}(x, 0) = \bar{p}(x), \quad x \in D, \quad \bar{W}_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in D_1$$

$$\sum_{k=1}^3 (V_0)_{ik} n_k = 0, \quad (x, t) \in \gamma_t, \quad \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial n} = M \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial n}, \quad (x, t) \in \gamma_t \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^3 (\bar{W}_1)_{ik} n_k = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_t$$

для $k \geq 1$

$$L\bar{V}_k = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad L_\alpha \bar{W}_{k+1} = 0, \quad (x, t) \in Q_1$$

$$\bar{V}_k(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in D, \quad \bar{W}_{k+1}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}_{k+1}}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in D_1$$

$$\bar{V}_k = \bar{W}_k, \quad (x, t) \in \gamma_t, \quad \sum_{k=1}^3 (\bar{W}_{k+1})_{ik} n_k = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_t$$

Функции $\bar{V}_k \in W_2^{2,1}(Q)$, $k = 0, 1, \dots$, $\bar{W}_k \in W_2^{2,1}(Q_1)$, $k = 1, 2, \dots$

Теорема 2.

Если α_0 таково, что $0 < \alpha$

$< \alpha_0$, то ряды S_1, S_2 абсолютно сходятся в $W_2^{2,1}(Q)$ и в $W_2^{2,1}(Q_1)$, и верны равенства $\bar{\sigma}^\alpha = S_1, (x, t) \in Q, \quad \bar{\sigma}^\alpha = S_2, (x, t) \in Q_1, (13)$, где $\bar{\sigma}^\alpha$ – решения задачи (9).

Доказательство. Ищем очевидные априорные оценки

$$\begin{aligned} \|\bar{W}_k\|_{W_2^{2,1}(Q_1)} &\leq C_2 \left\| \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial n} \right\|_{W_2^{1/2,1}(\gamma_t)} \leq C_2 \left\| \frac{\partial \bar{V}_{k-1}}{\partial N} \right\|_{W_2^{1/2,1}(\gamma_t)} \\ &\leq C_2 C_3 \|\bar{V}_{k-1}\|_{W_2^{2,1}(Q)}, \end{aligned} \quad (14).$$

Где $C_2 C_3$ константы зависят от областей D, D_1 и не зависят от α .

Покажем сходимость рядов S_1 в $W_2^{2,1}(Q)$ и S_2 в $W_2^{2,1}(Q_1)$, имеем

$$\|\bar{V}_k\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_4 \|\bar{V}_k\|_{W_2^{3/2,1}(\gamma_t)} = C_4 \|\bar{W}_k\|_{W_2^{3/2,1}(\gamma_t)} \leq C_4 C_5 \|\bar{W}_k\|_{W_2^{2,1}(Q_1)}, \quad \text{используя (8), (14),}$$

получим

$$\begin{aligned} \|\bar{V}_k\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C_6 \|\bar{V}_{k-1}\|_{W_2^{2,1}(Q)}, \quad k \geq 1 \\ \|\bar{V}_0\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C_1 \|\bar{F}\|_{L_2(Q)} + \int_0^{t_1} \|\bar{g}\|_{W_2^1(D)} dt + \|\bar{p}\|_{L_2(D)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $C_6 = C_2 C_3 C_4 C_5$

Полагая $\alpha < \alpha_0 = C_6^{-1}$, получим ряд S_1 , абсолютно сходится в $W_2^{2,1}(Q)$ и соответственно ряд S_2 абсолютно сходится в $W_2^{2,1}(Q_1)$. Умножая (12) для $\bar{V}_k$ и $\bar{W}_k$ на α_k , и суммируя по k , имеем

$$\begin{aligned} LS_1 &= \bar{F}, (x, t) \in Q, L_\alpha S_2 = 0, (x, t) \in Q_1 \\ S_1(x, 0) &= 0, \frac{\partial S_1}{\partial t}(x, 0) = 0, x \in D \quad S_2(x, 0) = 0, \frac{\partial S_2}{\partial t}(x, 0) = 0, x \in D \\ S_1 &= S_2, (x, t) \in \gamma_t, \frac{\partial S_2}{\partial n} = M \alpha \frac{\partial S_1}{\partial N}(x, t) \in \gamma_t \quad (16) \quad S_2(x, t) = 0, (x, t) \in \Gamma_t \end{aligned}$$

Отсюда получаем $\bar{\sigma}^\alpha = S_1$ в Q , $\bar{\sigma}^\alpha = S_2$ в Q_1 , если $0 < \alpha < \alpha_0$. Из доказательства этой теоремы вытекает справедливость следующего утверждения

$$\begin{aligned} \|\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_+^\alpha\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C_7 \alpha (\|\bar{F}\|_{L_2(Q)} + \int_0^{t_1} \|\bar{g}\|_{W_2^1(D)} dt + \|\bar{p}\|_{L_2(D)}) \\ \|\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_-^\alpha\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C_7^1 \alpha (\|\bar{F}\|_{L_2(Q)} + \int_0^{t_1} \|\bar{g}\|_{W_2^1(D)} dt + \|\bar{p}\|_{L_2(D)}) \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $\bar{\sigma}_+^\alpha = \bar{\sigma}^\alpha$, при $M=1$, $\bar{\sigma}_-^\alpha = \bar{\sigma}^\alpha$ при $M=-1$.

$\bar{\sigma}$ – решение задачи I. Далее можно сформулировать теорему дающую двусторонние оценки.

Теорема 3. Если $0 < \alpha < \alpha_0$, то справедлива оценка

$$\left\| \bar{\sigma} - \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_+^\alpha + \bar{\sigma}_-^\alpha) \right\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_8 \alpha^2 (\|\bar{F}\|_{L_2(Q)} + \int_0^{t_1} \|\bar{g}\|_{W_2^1(D)} dt + \|\bar{p}\|_{L_2(D)}), \quad (18)$$

Доказательство. Используя предыдущую теорему 2, имеем

$$\bar{\sigma}_+^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{V}_k^+, (x, t) \in Q, \bar{\sigma}_-^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{W}_k^+, (x, t) \in Q_1, \quad (19)$$

здесь $\bar{V}_k^+, \bar{W}_k^+$ – решение (12) при $M=1$.

В соответствии с теоремой 2 представим $\bar{\sigma}_-^\alpha$ в виде

$$\bar{\sigma}_-^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{V}_k^-, (x, t) \in Q, \bar{\sigma}_+^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{W}_k^-, (x, t) \in Q_1, \quad (20)$$

здесь $\bar{V}_k^-, \bar{W}_k^-$ – решения (12) при $M=-1$.

Получаем $\bar{V}_0^+ \equiv \bar{V}_0^- \equiv \bar{\sigma}$ – решение задачи I.

Введем обозначения $\bar{W}_1 = \bar{W}_1^+ + \bar{W}_1^-$, функция $\bar{W}_1$ удовлетворяет следующей задачи

$$L_\alpha \bar{W}_1 = 0, (x, t) \in Q_1 \quad \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial n} = 0, (x, t) \in \gamma_t$$

$$\bar{W}_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in D_1 \quad \bar{W}_1(x, t) = 0, (x, t) \in \Gamma_t$$

отсюда получим $\bar{W}_1 = 0$, или $\bar{W}_1^+ = -\bar{W}_1^-$

Далее введем $\bar{V}_1 = \bar{V}_1^+ + \bar{V}_1^-$, функция $\bar{V}_1$ удовлетворяет задаче

$$L\bar{V}_1 = 0, (x, t) \in Q \quad \bar{V}_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in D$$

$$\bar{V}_1(x, t) = 0, (x, t) \in \gamma_t$$

откуда имеем $\bar{V}_1 = 0$, или $\bar{V}_1^+ = -\bar{V}_1^-$

Последовательно вводя $\bar{W}_2 = \bar{W}_2^+ + \bar{W}_2^-$, $\bar{V}_2 = \bar{V}_2^+ + \bar{V}_2^-$, получим $\bar{W}_2^+ = \bar{W}_2^-$, $\bar{V}_2^+ = \bar{V}_2^-$, продолжая этот процесс придем $\bar{V}_k^+ = \bar{V}_k^-$, если k – четно, $\bar{V}_k^+ = -\bar{V}_k^-$ если k – нечетно (21). Используя (21) подставив (19), (20), имеем

$$\bar{\sigma}_+^\alpha = \bar{\sigma} + \alpha \bar{V}_1^+ + \alpha_2 \bar{V}_2^+ + \dots$$

$$\bar{\sigma}_-^\alpha = \bar{\sigma} - \alpha \bar{V}_1^- + \bar{V}_2^- + \dots$$

Применяя разложения (22), а также оценку (17) при $0 < \alpha < \alpha_1$, получим

$$\left\| \bar{\sigma} - \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_+^\alpha + \bar{\sigma}_-^\alpha) \right\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \alpha^2 \left\| \bar{V}_2^+ + \alpha^2 \bar{V}_4^+ + \dots \right\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_8 \alpha^2 \left\| \bar{V}_0^+ \right\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_9 \alpha^2 \left(\left\| \bar{F} \right\|_{L_2(Q)} + \int_0^{t_1} \left\| \bar{g} \right\|_{W_2^1(D)} dt + \left\| \bar{p} \right\|_{L_2(D)} \right)$$

Литература

- [1]. Букенов М.М. Постановка динамической задачи линейной вязкоупругости в скоростях напряжений РАН. Сиб.отделение – Новосибирск, Сибирский журнал вычислительной математики, 2005.-т.8, №4, С.289-295
- [2]. Пацюк В.И. Стационарирование динамических процессов в вязкоупругих средах: Дис... канд. физ.-мат.-наук-Новосибирск, 1982.
- [3]. Букенов М.М. Малые параметры в алгоритмах задач теории упругости: Дис... канд. физ.-мат.-наук-Новосибирск, 1986.
- [4]. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения. // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1973, т. 1, №2, С.109-115
- [5]. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил. // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1972, т. 3, №5, С.52-67.
- [6]. Коновалов А.Н. Об одном варианте метода фиктивных областей. // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, 1975. С.191-199.
- [7]. Chertova.K. Locally two-sided approximate solutions in parabolic problems. Bull. Nov. Comp. Center, 1994, Num. Anal., 6, 37-42.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ЭЛАСТИЧНОСТИ СПРОСА ТОВАРОВ И УСЛУГ ПО ГРУППАМ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Габбасов М.Б.

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

gmarson19@gmail.com

Эластичность спроса является мощным инструментом принятия решений для бизнеса в условиях неопределенности. До сих пор этот инструмент не находит широкого применения на практике из-за отсутствия достаточно точных методов расчета эластичности и из-за сложности сбора необходимых данных для расчета. Предлагаемая методология описывает методику расчета эластичности спроса на товары и услуги по группам потребителей услуг и товаров. Методика определения эластичности основана на балансовой модели определения эластичности, на предположении о неизменности вкусов потребителей при пропорциональном росте доходов и цен и позволяет рассчитывать:

- 1) прямую эластичность спроса по цене,

2) перекрестную эластичность спроса по цене,

3) эластичность спроса по доходу,

Достоинством данной методики является возможность ее применения для расчета эластичностей спроса на микро-, мезо- и макроэкономических уровнях.

Эластичность — (от греческого *elásticos* — гибкий, упругий) мера реагирования одной переменной величины (функции) к изменению другой величины. Иначе, эластичность — это число, которое показывает процентное изменение одной переменной в результате однопроцентного изменения другой переменной. Мерой измерения эластичности является коэффициент эластичности. Математически коэффициент эластичности $\varepsilon(f, g)$ функции $f(x)$ отно-

сительно функции $g(x)$ выражают формулой $\frac{df(x)}{dg(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)}$, где $df(x)$ и $dg(x)$ есть дифференциалы

функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Как видно из определения коэффициент эластичности является безразмерной величиной. Заметим, что $\varepsilon(f, g) \cdot \varepsilon(g, f) = 1$.

Для определения эластичности спроса, эластичности предложения и эластичности цены приведем необходимые определения.

Цена — количество денег, в обмен на которые продавец готов передать (продать), а покупатель купить единицу товара или услуги. Цена есть стоимость единицы товара или услуги. Цены бывают розничные и оптовые. Цену на i —ый товар или услугу будем обозначать $резр_i$.

Спрос — подкрепленное денежной возможностью желание, намерение покупателей, потребителей приобрести данный товар или услугу. Спрос характеризуется его величиной, означающей количество товара (услуги), которое покупатель желает и способен приобрести по данной цене в данный период времени. Величина спроса зависит как от цены на товар (услугу), так и от других, неценовых факторов, таких, как мода, доходы потребителей, а также от цены на другие товары (услуги), в том числе на товары-заменители и на сопряженные, сопутствующие товары. Величину спроса на i —ый товар или услугу будем обозначать через V_i . Различают следующие виды спроса:

- индивидуальный спрос — спрос одного лица,
- рыночный спрос — спрос на данном рынке,
- совокупный спрос — спрос на всех рынках данного товара (услуги) или на все производимые и продаваемые товары (услуги).

Доходы — денежные средства или материальные ценности, полученные государством, физическим или юридическим лицом в результате какой-либо деятельности за определенный период времени. Доходом являются любые притоки денежных средства за определенный период, которые можно потратить на необходимые нужды (потребности). Доход j —го потребителя или j —ой группы потребителей будем обозначать R_j .

Доля дохода потребителя — отношение расходов потребителя на приобретение товара или услуги к его доходу. Потребитель или группа потребителей тратят свои доходы, полученные за определенный период на приобретение различных товаров и услуг. Неизрасходованная часть дохода потребителя за определенный период составляет его сбережения. Сумма всех расходов потребителя на приобретение различных товаров и услуг равна разности его дохода и сбережений. Иначе говоря, сумма долей доходов потребителя и доли сбережений равна единице. Долю дохода j —го потребителя или j —ой группы потребителей на приобретение i — ого товара или услуги будем обозначать q_{ji} .

Будем рассматривать эластичности спроса, эластичности цены и эластичности доли доходов потребителя (покупателя). Рассмотрим эти понятия более подробно. Для каждой из этих функций различают прямую эластичность по цене, перекрестную эластичность по цене и эластичность по доходу. Таким образом, определим следующие эластичности, необходимые для построения нашей теории:

- 1) прямая эластичность спроса по цене,

- 2) перекрестная эластичность спроса по цене,
- 3) эластичность спроса по доходу потребителей,
- 4) прямая эластичность цены по цене,
- 5) перекрестная эластичность цены по цене,
- 6) эластичность цены по доходу потребителей,
- 7) прямая эластичность доли дохода потребителей по цене,
- 8) перекрестная эластичность доли дохода потребителей по цене,
- 9) эластичность доли дохода потребителей по доходу потребителей,

По определению коэффициент прямой эластичности спроса по цене на i –ый товар или услугу для j –ой группы потребителей равен $\varepsilon(V_{ji}, p_{ji}) = \frac{\frac{dV_{ji}}{V_{ji}}}{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}}$, где V_{ji} – величина спроса

j –ой группы потребителей на i –ый товар или услугу, p_{ji} – цена i –го товара или услуги для j –ой группы потребителей. Прямая эластичность спроса по цене показывает относительное изменение спроса на i –ый товар или услугу при изменении цены на этот товар или услугу. Как правило, коэффициент прямой эластичности спроса по цене является отрицательной величиной, что соответствует факту, что если цена на i –ый товар увеличивается ($dp_{ji} > 0$), то величина спроса на него падает ($dV_{ji} < 0$), и наоборот, если цена на i –ый товар падает ($dp_{ji} < 0$), то величина спроса растет ($dV_{ji} > 0$). Бывает случаи, когда коэффициент прямой эластичности спроса больше нуля, что соответствует товарам роскоши.

Коэффициент перекрестной эластичности спроса по цене выражает относительное изменение величины спроса на один товар или услугу при изменении цены на другой товар или

услугу и определяется формулой $\varepsilon(V_{ji}, p_{jk}) = \frac{\frac{dV_{ji}}{V_{ji}}}{\frac{dp_{jk}}{p_{jk}}}$, где V_{ji} – величина спроса j –ой группы

потребителей на i –ый товар или услугу, p_{jk} – цена k –го товара или услуги для j –ой группы потребителей. Коэффициент перекрестной эластичности может быть положительным, отрицательным или нулевым.

Если $\varepsilon(V_{ji}, p_{jk}) > 0$, то товары (услуги) i и k называют взаимозаменяемыми. Для таких товаров повышение цены на k –ый товар ($dp_{jk} > 0$) ведет к увеличению спроса на i –ый товар ($dV_{ji} > 0$) и уменьшение цены на k –ый товар ($dp_{jk} < 0$) ведет к уменьшению спроса на i –ый товар ($dV_{ji} < 0$). Если $\varepsilon(V_{ji}, p_{jk}) < 0$, то товары (услуги) i и k называют взаимодополняющими. Для таких товаров повышение цены на k –ый товар ($dp_{jk} > 0$) ведет к уменьшению спроса на i –ый товар ($dV_{ji} < 0$) и уменьшение цены на k –ый товар ($dp_{jk} < 0$) ведет к увеличению спроса на i –ый товар ($dV_{ji} > 0$). Если $\varepsilon(V_{ji}, p_{jk}) = 0$, то товары (услуги) i и k называют независимыми. Для таких товаров изменение цены одного из них не влияет на величину спроса на другой товар.

Коэффициент эластичности спроса по доходу потребителей выражает относительное изменение величины спроса на один товар или услугу при изменении доходов потребителей и

определяется формулой $\varepsilon(V_{ji}, R_j) = \frac{\frac{dV_{ji}}{V_{ji}}}{\frac{dR_j}{R_j}}$, где V_{ji} – величина спроса j –ой группы потреби-

телей на i –ый товар или услугу, R_j – доход j –ой группы потребителей. Коэффициент эластичности спроса по доходу может быть как отрицательной, так и положительной величиной.

Если $\varepsilon(V_{ji}, R_j) < 0$, то такой товар (услуга) называется низкокачественным. Для таких товаров увеличение дохода потребителей ($dR_j > 0$) приводит к падению спроса на товар ($dV_{ji} < 0$), и наоборот, падение дохода потребителей ($dR_j < 0$) приводит к повышению спроса на товар ($dV_{ji} > 0$). Если $\varepsilon(V_{ji}, R_j) > 0$, то такой товар (услуга) называется нормальным. Для

таких товаров (услуг) с ростом дохода потребителей увеличивается и спрос на эти товары (услуги). Среди нормальных товаров можно выделить три группы: товары первой необходимости, спрос на которые растет медленнее роста доходов ($\varepsilon(V_{ji}, R_j) < 1$), товары второй необходимости, спрос на которые растет по мере роста доходов ($\varepsilon(V_{ji}, R_j) = 1$), и предметы роскоши, спрос на которые опережают рост доходов ($\varepsilon(V_{ji}, R_j) > 1$).

Коэффициент прямой эластичности цены по цене по определению есть эластичность цены одного товара (услуги) по цене этого же товара (услуги) и выражается формулой

$$\varepsilon(p_{ji}, p_{ji}) = \frac{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}}{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}} = 1, \text{ где } p_{ji} - \text{цена } i - \text{го товара или услуги для } j - \text{ой группы потребителей}$$

или производителей. Таким образом, прямая эластичность цены по цене всегда равна единице и не представляет практического интереса.

Коэффициент перекрестной эластичности цены по цене есть эластичность цены одного това-

$$\text{ра (услуги) по цене другого товара (услуги) и выражается формулой } \varepsilon(p_{ji}, p_{jk}) = \frac{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}}{\frac{dp_{jk}}{p_{jk}}}, \text{ где}$$

p_{ji} и p_{jk} – цены i –го и k –го товаров (услуг) соответственно для j –ой группы потребителей или производителей. Между ценами разных товаров могут существовать зависимости, обусловленные бизнес процессами производства этих товаров. Например, при повышении цены на электроэнергию повышаются цены на многие товары и услуги, так как стоимость электроэнергии составляет часть себестоимости этих товаров и услуг. С другой стороны цены разных товаров могут быть совершенно независимыми, в этом случае рассчитывать перекрестную эластичность одной цены по другой цене не имеет смысла. То есть, если между ценами нет никаких стохастических связей, то перекрестная эластичность цены равна нулю и в этом случае не выполняется соотношение $\varepsilon(p_{ji}, p_{jk}) \cdot \varepsilon(p_{jk}, p_{ji}) = 1$.

Коэффициент эластичности цены по доходу потребителей выражает относительное изменение цены при изменении доходов потребителей и определяется формулой $\varepsilon(p_{ji}, R_j) = \frac{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}}{\frac{dR_j}{R_j}}$,

где p_{ji} – цена i –го товара или услуги для j –ой группы потребителей, R_j – доход j –ой группы потребителей. Коэффициент эластичности цены по доходу может быть как отрицательной, так и положительной величиной. Для низкокачественных товаров $\varepsilon(p_{ji}, R_j) < 0$, для нормальных товаров $\varepsilon(p_{ji}, R_j) > 0$.

В зависимости от изменения цены и дохода меняется также структура расходов потребителя и, соответственно, эластичность доли дохода потребителя.

Коэффициент прямой эластичности доли дохода потребителей по цене определяется форму-

$$\text{лой } \varepsilon(q_{ji}, p_{ji}) = \frac{\frac{dq_{ji}}{q_{ji}}}{\frac{dp_{ji}}{p_{ji}}}, \text{ где } q_{ji} - \text{доля дохода } j - \text{ой группы потребителей на приобретение } i - \text{го}$$

товара или услуги, p_{ji} – цена i –го товара или услуги для j –ой группы потребителей. Коэффициент прямой эластичности доли дохода потребителей по цене показывает относительное изменение доли дохода потребителей, приходящейся на данный товар или услуги при изменении цены на этот товар или услугу. Коэффициент прямой эластичности доли дохода потребителей по цене может быть как отрицательной, так и положительной величиной. При повышении цены на данный товар доля дохода потребителя, расходуемая на данный товар, увеличивается при неизменном объеме потребления, с другой стороны спрос (объем потребления) данного товара падает, так как потребитель может переключиться на товары-заменители. Если при этом доля дохода потребителя увеличивается, то это говорить о том, что данный товар является значимым для данной группы потребителей.

Коэффициент перекрестной эластичности доли дохода потребителей по цене определяется формулой $\varepsilon(q_{ji}, p_{jk}) = \frac{\frac{dq_{ji}}{q_{ji}}}{\frac{dp_{jk}}{p_{jk}}}$, где q_{ji} – доля дохода j –ой группы потребителей на приобрете-

ние i –го товара или услуги, p_{jk} – цена k –го товара или услуги для j –ой группы потребителей. Коэффициент перекрестной эластичности доли дохода потребителей по цене показывает относительное изменение доли дохода потребителей, приходящейся на i –ый товар или услугу при изменении цены на k –ый товар или услугу.

Коэффициент эластичности доли дохода потребителей по доходу потребителей для j –ой группы потребителей определяется формулой $\varepsilon(q_{ji}, R_j) = \frac{\frac{dq_{ji}}{q_{ji}}}{\frac{dR_j}{R_j}}$, где q_{ji} – доля дохода j –ой

группы потребителей на приобретение i –го товара или услуги, R_j – доход j –ой группы потребителей. Коэффициент эластичности доли дохода по доходу показывает относительное изменение доли дохода потребителей, приходящейся на i –ый товар или услуги при изменении общего дохода потребителей.

Модель расчета эластичностей спроса позволяет рассчитывать определенные выше эластичности спроса, цены и доли дохода потребителя. Для расчета эластичности спроса предположим, что заданы определенное количество товаров и услуг и выбраны определенные группы потребителей, которые потребляют эти товары и услуги. Построим следующую таблицу 1, где по столбцам расположены группы потребителей, а по строкам – выбранные товары (услуги).

Таблица 1.

	Группа потребителей 1	Группа потребителей 2	...	Группа потребителей m	Объем потребления
Товар (услуга) 1	V_{11}	V_{21}	...	V_{m1}	V_1
Товар (услуга) 2	V_{12}	V_{22}	...	V_{m2}	V_2
....	...	...	...	...	...
Товар (услуга) n	V_{1n}	V_{2n}	...	V_{mn}	V_n

В каждой ячейке таблицы находятся объем потребления товара (услуги) i группой потребителей j , в ячейках последнего столбца находятся общие объемы потребления i –го товара (услуги). Для данной таблицы выполняются балансовые уравнения

$$\sum_{j=1}^m V_{ji} = V_i \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Умножим каждую ячейку таблицы 1 на цену (тарифы) i –го товара (услуги) для j –ой группы потребителей p_{ji} , а последний столбец на среднюю цену (тариф) i –го товара (услуги) p_i , которая определяется по формуле $p_i = \frac{\sum_{j=1}^m V_{ji} \cdot p_{ji}}{V_i}$. В результате получим таблицу 2.

Таблица 2.

	Группа потребителей 1	Группа потребителей 2	...	Группа потребителей m	Объем потребления
Товар (услуга) 1	$V_{11} \cdot p_{11}$	$V_{21} \cdot p_{21}$	...	$V_{m1} \cdot p_{m1}$	$V_1 \cdot p_1$
Товар (услуга) 2	$V_{12} \cdot p_{12}$	$V_{22} \cdot p_{22}$	...	$V_{m2} \cdot p_{m2}$	$V_2 \cdot p_2$
....	...	...	...	...	...
Товар (услуга) n	$V_{1n} \cdot p_{1n}$	$V_{2n} \cdot p_{2n}$	...	$V_{mn} \cdot p_{mn}$	$V_n \cdot p_n$

Доходы групп потребителей	R_1	R_2	...	R_m	$\sum_{j=1}^m R_j$
---------------------------	-------	-------	-----	-------	--------------------

Последняя строка таблицы содержит доходы групп потребителей. Для этой таблицы соблюдаются балансовые уравнения

$$\sum_{j=1}^m V_{ji} \cdot p_{ji} = V_i \cdot p_i \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Из таблицы 2 видно, каким образом распределен общий объем потребления каждой услуги по группам потребителей (балансовые соотношения (2)). С другой стороны, если анализировать каждый столбец таблицы 2, то видно какую часть доходов каждая группа потребителей тратит на какие услуги. Как правило, $\sum_{i=1}^n V_{ji} \cdot p_{ji} \leq R_j$ для каждого $j = 1, 2, \dots, m$. Разницу между правой и левой частями последнего неравенства потребители тратят на другие услуги и на сбережение. Если эта разница отрицательна, то это означает, что потребители потратили сбережения прошлых периодов. Добавим таблице 2 еще одну строку перед последней строкой, в которую напомним разницу $V_{j,n+1} = R_j - \sum_{i=1}^n V_{ji} \cdot p_{ji}$, которую назовем «сбережениями» (таблица 3). Термин «сбережения» здесь носит условный характер.

Таблица 3.

	Группа потребителей 1	Группа потребителей 2	...	Группа потребителей m	Объем потребления
Товар (услуга) 1	$V_{11} \cdot p_{11}$	$V_{21} \cdot p_{21}$	...	$V_{m1} \cdot p_{m1}$	$V_1 \cdot p_1$
Товар (услуга) 2	$V_{12} \cdot p_{12}$	$V_{22} \cdot p_{22}$	...	$V_{m2} \cdot p_{m2}$	$V_2 \cdot p_2$
....	...	...	...	...	...
Товар (услуга) n	$V_{1n} \cdot p_{1n}$	$V_{2n} \cdot p_{2n}$	...	$V_{mn} \cdot p_{mn}$	$V_n \cdot p_n$
Сбережения (товар n+1)	$V_{1,n+1} \cdot 1$	$V_{2,n+1} \cdot 1$	...	$V_{m,n+1} \cdot 1$	$V_{n+1} \cdot 1$
Доходы групп потребителей	R_1	R_2	...	R_m	$\sum_{j=1}^m R_j$

Единицей измерения сбережений является денежная единица, поэтому ее цена равна единице, что отражено в таблице 3 в предпоследней строке. Для таблицы 3 выполняются балансовые соотношения (2) для всех строк $i = 1, 2, \dots, n + 1$ и соотношения

$$\sum_{i=1}^{n+1} V_{ji} \cdot p_{ji} = R_j \text{ для всех } j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

В этих соотношениях $p_{j,n+1} = 1$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$. Поделим каждый столбец таблицы 3 на R_j . Получим следующую таблицу 4.

Таблица 4.

	Группа потребителей 1	Группа потребителей 2	...	Группа потребителей m
Товар (услуга) 1	q_{11}	q_{21}	...	q_{m1}
Товар (услуга) 2	q_{12}	q_{22}	...	q_{m2}
...	...	...	...	...
Товар (услуга) n	q_{1n}	q_{2n}	...	q_{mn}
Сбережения (n + 1)	$q_{1,n+1}$	$q_{2,n+1}$	...	$q_{m,n+1}$

В каждой ячейке таблицы 4 находятся доли дохода группы потребителей и справедливы балансовые соотношения

$$\sum_{i=1}^{n+1} q_{ji} = 1 \text{ для всех } j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

По определению $q_{ji} = \frac{V_{ji} \cdot p_{ji}}{R_j}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n + 1, j = 1, 2, \dots, m$. Величина спроса j -ой группы потребителей V_{ji} и доля дохода j -ой группы потребителей q_{ji} являются функциями от $p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{ji}, \dots, p_{jn}, p_{j,n+1}, R_j$, так как на величину спроса влияют цены (тарифы) на данную и другие товары (услуги) и доходы данной группы потребителей. Тогда перепишем последнее соотношение в следующем виде:

$$V_{ji}(p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{ji}, \dots, p_{jn}, p_{j,n+1}, R_j) = \frac{q_{ji}(p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{ji}, \dots, p_{jn}, p_{j,n+1}, R_j) \cdot R_j}{p_{ji}}, \quad (5)$$

для всех $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n + 1$.

Вычислим эластичность спроса по цене. По определению дифференциал функции V_{ji} равен

$$dV_{ji} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial V_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} + \frac{\partial V_{ji}}{\partial R_j} dR_j = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{R_j}{p_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} + \frac{q_{ji}}{p_{ji}} \frac{\partial R_j}{\partial p_{jk}} dp_{jk} - \frac{q_{ji} \cdot R_j}{p_{ji} \cdot p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} \right) + \\ + \frac{R_j}{p_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j} dR_j + \frac{q_{ji}}{p_{ji}} dR_j - \frac{q_{ji} R_j}{p_{ji} p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial R_j} dR_j$$

Отсюда поделив на V_{ji} получим

$$\frac{dV_{ji}}{V_{ji}} = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{q_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} + \frac{1}{R_j} \frac{\partial R_j}{\partial p_{jk}} dp_{jk} - \frac{1}{p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} \right) + \frac{1}{q_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j} dR_j + \frac{dR_j}{R_j} - \frac{1}{p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial R_j} dR_j. \quad (6)$$

Тогда эластичность спроса по цене

$$\varepsilon(V_{ji}, p_{jl}) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{p_{jl}}{q_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jk}} \frac{dp_{jk}}{dp_{jl}} + \frac{p_{jl}}{R_j} \frac{\partial R_j}{\partial p_{jk}} \frac{dp_{jk}}{dp_{jl}} - \frac{p_{jl}}{p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial p_{jk}} \frac{dp_{jk}}{dp_{jl}} \right) + \\ + \frac{p_{jl}}{q_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j} \frac{dR_j}{dp_{jl}} + \frac{p_{jl}}{R_j} \frac{dR_j}{dp_{jl}} - \frac{p_{jl}}{p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial R_j} \frac{dR_j}{dp_{jl}}.$$

Представим это выражение в следующем виде:

$$\varepsilon(V_{ji}, p_{jl}) = \frac{p_{jl}}{q_{ji}} \frac{1}{dp_{jl}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} + \frac{p_{jl}}{R_j} \frac{1}{dp_{jl}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial R_j}{\partial p_{jk}} dp_{jk} - \frac{p_{jl}}{p_{ji}} \frac{1}{dp_{jl}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial p_{ji}}{\partial p_{jk}} dp_{jk} + \\ + \frac{p_{jl}}{q_{ji}} \frac{1}{dp_{jl}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j} dR_j + \frac{p_{jl}}{R_j} \frac{1}{dp_{jl}} dR_j - \frac{p_{jl}}{p_{ji}} \frac{1}{dp_{jl}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial R_j} dR_j,$$

Собирая подобные члены и пользуясь определением дифференциала получим

$$\varepsilon(V_{ji}, p_{jl}) = \frac{p_{jl}}{q_{ji}} \frac{dq_{ji}}{dp_{jl}} + 2 \frac{p_{jl}}{R_j} \frac{dR_j}{dp_{jl}} - 2 \frac{p_{jl}}{p_{ji}} \frac{dp_{ji}}{dp_{jl}},$$

или

$$\varepsilon(V_{ji}, p_{jl}) = \varepsilon(q_{ji}, p_{jl}) + 2\varepsilon(R_j, p_{jl}) - 2\varepsilon(p_{ji}, p_{jl}). \quad (7)$$

Полученная формула выражает связь между коэффициентами эластичности спроса по цене и эластичности доли дохода потребителя по цене. Из формулы (7) прямая эластичность спроса по цене получится, если положить $i = l$, тогда

$$\varepsilon(V_{ji}, p_{ji}) = \varepsilon(q_{ji}, p_{ji}) + 2\varepsilon(R_j, p_{ji}) - 2. \quad (8)$$

Вычислим эластичность спроса по доходу. Из формулы (6) получим

$$\varepsilon(V_{ji}, R_j) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{R_j}{q_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jk}} \frac{dp_{jk}}{dR_j} + \frac{\partial R_j}{\partial p_{jk}} \frac{dp_{jk}}{dR_j} - \frac{R_j}{p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial p_{jk}} \frac{dp_{jk}}{dR_j} \right) + \frac{R_j}{q_{ji}} \frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j} + 1 - \frac{R_j}{p_{ji}} \frac{\partial p_{ji}}{\partial R_j}.$$

Отсюда проведя аналогичные преобразования как при выводе формулы (7) получим окончательно

$$\varepsilon(V_{ji}, R_j) = \varepsilon(q_{ji}, R_j) + 2 - 2\varepsilon(p_{ji}, R_j). \quad (9)$$

Формулы (7) – (9) выражают эластичности спроса через эластичности доли дохода потребителей и эластичности цены по цене и по доходу. Доля дохода потребителей зависят от цен на товары (услуги) и дохода потребителей, так же как и спрос на товары (услуги). Поэтому задача определения эластичности спроса приводится к задаче определения эластичности доли дохода потребителей, и эластичности цены по цене и доходу. Долю дохода потребителей ищем в виде следующей функции:

$$q_{ji} = C_{ji} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} p_{jk}^{\alpha_{jik}} \cdot R_j^{\alpha_{j,i,n+2}} \text{ для всех } j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (10)$$

удовлетворяющей условиям $0 \leq q_{ji} \leq 1$.

В силу наших предположений при одинаковом изменении всех цен (тарифов) и дохода потребителей структура потребления потребителей не изменяется, следовательно, если умножить все цены (тарифы) и доходы потребителей в θ раз, то доли дохода не изменятся. Подставляя в формулу (10) вместо p_{jk} и R_j соответственно θp_{jk} и θR_j получим

$$q_{ji} = C_{ji} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} \theta^{\alpha_{jik}} p_{jk}^{\alpha_{jik}} \cdot \theta^{\alpha_{j,i,n+2}} R_j^{\alpha_{j,i,n+2}} = C_{ji} \cdot \theta^{\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_{jik}} \prod_{k=1}^{n+1} p_{jk}^{\alpha_{jik}} \cdot R_j^{\alpha_{j,i,n+2}},$$

откуда $\theta^{\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_{jik}} = 1$, следовательно, $\sum_{k=1}^{n+2} \alpha_{jik} = 0$. Тогда формула (10) переписывается в виде

$$q_{ji} = C_{ji} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} p_{jk}^{\alpha_{jik}} \cdot R_j^{-\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{jik}} \text{ для всех } j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (11)$$

Предположим, что нам известны значения доли доходов, цен (тарифов), доходов потребителей за T периодов. Обозначим их соответственно, $q_{jit}^*, p_{jit}^*, R_{jt}^*$, где $t = 1, 2, \dots, T$. Методом наименьших квадратов найдем неизвестные коэффициенты $C_{ji}, \alpha_{jik}, j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n+1, k = 1, 2, \dots, n+1$, уравнения (11). Для этого значения цен (тарифов) p_{jit}^* и доходов потребителей R_{jt}^* приведем к одному периоду дисконтированием по уровню инфляции между периодами. Полученные значения обозначим так же. При этом цены $p_{j,n+1}$ будут отличными от единицы. Пользуясь балансовыми соотношениями (4) исключим из перечня неизвестных $q_{j,n+1}$:

$$q_{j,n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n \left(C_{ji} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} p_{jk}^{\alpha_{jik}} \cdot R_j^{-\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{jik}} \right), j = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

Перепишем уравнение (11) в следующем виде, предварительно прологарифмировав обе части:

$$\bar{q}_{ji} = \bar{C}_{ji} + \sum_{k=1}^{n+1} (\bar{p}_{jk} - \bar{R}_j) \alpha_{jik} \text{ для всех } j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\bar{q}_{ji} = \ln q_{ji}$, $\bar{C}_{ji} = \ln C_{ji}$, $\bar{p}_{ji} = \ln p_{ji}$, $\bar{R}_j = \ln R_j$. Для определения коэффициентов $\bar{C}_{ji}$ и α_{jik} будем минимизировать функционал

$$F(\bar{C}_{ji}, \alpha_{jik}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\bar{q}_{jit}^* - \bar{C}_{ji} - \sum_{k=1}^{n+1} (\bar{p}_{jkt}^* - \bar{R}_{jt}^*) \alpha_{jik})^2,$$

где $\bar{q}_{jit}^* = \ln(q_{jit}^*)$, $\bar{p}_{jit}^* = \ln(p_{jit}^*)$, $\bar{R}_{jt}^* = \ln(R_{jt}^*)$. Тогда искомые величины $\bar{C}_{ji}$ и α_{jik} удовлетворяют системе уравнений:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^{n+1} (\bar{p}_{jkt}^* - \bar{R}_{jt}^*) \alpha_{jik} + T \cdot \bar{C}_{ji} = \sum_{t=1}^T \bar{q}_{jit}^*, j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{l=1}^{n+1} (\bar{p}_{jlt}^* - \bar{R}_{jt}^*) (\bar{p}_{jkt}^* - \bar{R}_{jt}^*) \alpha_{jil} + \sum_{t=1}^T (\bar{p}_{jkt}^* - \bar{R}_{jt}^*) \bar{C}_{ji} = \sum_{t=1}^T (\bar{p}_{jkt}^* - \bar{R}_{jt}^*) \bar{q}_{jit}^*, \quad (14)$$

$$j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n + 1$$

Система уравнений (13) – (14) содержит $mn(n + 2)$ уравнений. Решив систему линейных алгебраических уравнений (13) – (14) находим $\bar{C}_{ji}$, α_{jik} при $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n + 1$ и определим C_{ji} по формуле $C_{ji} = \exp(\bar{C}_{ji})$.

Далее из формулы (11) вычислим эластичность доли доходов потребителей. По определению $dq_{ji} = \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial q_{ji}}{\partial p_{jl}} dp_{jl} + \frac{\partial q_{ji}}{\partial R_j} dR_j = \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil} q_{ji} \frac{dp_{jl}}{p_{jl}} - \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil} q_{ji} \frac{dR_j}{R_j}$,

откуда

$$\frac{dq_{ji}}{q_{ji}} = \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil} \frac{dp_{jl}}{p_{jl}} - \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil} \frac{dR_j}{R_j} \quad (15)$$

Из формулы (15) с помощью элементарных преобразований получим

$$\varepsilon(q_{ji}, p_{jk}) = \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil} \cdot \varepsilon(p_{jl}, p_{jk}) - \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil} \cdot \varepsilon(R_j, p_{jk}), \quad (16)$$

$$\varepsilon(q_{ji}, R_j) = \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil} \cdot \varepsilon(p_{jl}, R_j) - \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil}, \quad (17)$$

где $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n + 1$. При $i = n + 1$ из формулы (12) получим

$$\frac{dq_{j,n+1}}{q_{j,n+1}} = - \sum_{i=1}^n \frac{q_{ji}}{q_{j,n+1}} \frac{dq_{ji}}{q_{ji}},$$

откуда

$$\varepsilon(q_{j,n+1}, p_{jk}) = - \frac{1}{q_{j,n+1}} \sum_{i=1}^n q_{ji} \varepsilon(q_{ji}, p_{jk}), \quad (18)$$

$$\varepsilon(q_{j,n+1}, R_j) = - \frac{1}{q_{j,n+1}} \sum_{i=1}^n q_{ji} \varepsilon(q_{ji}, R_j), \quad (19)$$

где $j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n + 1$.

Формулы (16) – (19) выражают эластичности долей дохода потребителей через эластичности цен. Таким образом, формулы (7) – (9), (16) – (19) сводят определение эластичностей спроса к определению эластичностей цен.

Матрица эластичностей цен является обратно симметричной матрицей, диагональные элементы которой равны единице. Обозначим матрицу эластичностей цен через $B = \{b_{jik}\}_{j=1,2,\dots,m,i=1,2,\dots,n+2,k=1,2,\dots,n+2}$, то есть $b_{jik} = \varepsilon(p_{ji}, p_{jk})$ при $i, k \in [1, \dots, n + 1]$ и $b_{j,i,n+2} = \varepsilon(p_{ji}, R_j)$, $b_{j,n+2,k} = \varepsilon(R_j, p_{jk})$. Для любого фиксированного j для произвольных $i, k, l \in [1, \dots, n + 2]$ справедливы равенства $b_{jik} \cdot b_{jkl} = b_{jil}$. Следовательно, при любом фиксированном j сечение матрицы B является матрицей предельно устойчивого рынка. Согласно теории спекулянта [1, 2] данная матрица однозначно восстанавливается $n+1$ образующими числами. Для нахождения этих чисел достаточно знать одну строку или столбец данной матрицы. Обозначим эти числа через s_{ji} , $i = 1, 2, \dots, n+1$. Тогда для $j, i > 1, k > 1$

$$b_{jik} = \frac{\prod_{l=1}^{k-1} s_{jl}}{\prod_{l=1}^{i-1} s_{jl}}, \quad b_{j1k} = \prod_{l=1}^{k-1} s_{jl}, \quad b_{ji1} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{i-1} s_{jl}}. \quad (20)$$

Кроме того, для любых j, i

$$s_{ji} = b_{j,i,i+1} = \varepsilon(p_{ji}, p_{j,i+1}) = \frac{1}{\varepsilon(p_{j,i+1}, p_{ji})}. \quad (21)$$

Выразим элементы последнего столбца матрицы B_j через образующие s_{ji} . Имеем

$$b_{j,i,n+2} = \varepsilon(p_{ji}, R_j) = \prod_{l=i}^{n+1} s_{jl}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Отсюда

$$b_{jik} = \frac{b_{j,i,n+2}}{b_{j,k,n+2}} \text{ для } j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n+1, k = 1, 2, \dots, n+1.$$

То есть

$$\varepsilon(p_{ji}, p_{jk}) = \frac{\varepsilon(p_{ji}, R_j)}{\varepsilon(p_{jk}, R_j)} \text{ для } j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n+1, k = 1, 2, \dots, n+1. \quad (22)$$

Таким образом мы выразили все эластичности цены по цене через эластичности цены по доходу. Тогда объединяя формулы (16), (17) и (22) получим

$$\varepsilon(q_{ji}, p_{jk}) = \frac{1}{\varepsilon(p_{jk}, R_j)} (\sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil} \varepsilon(p_{jl}, R_j) - \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil}), \quad (23)$$

$$\varepsilon(q_{ji}, R_j) = \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil} \varepsilon(p_{jl}, R_j) - \sum_{l=1}^{n+1} \alpha_{jil}, \quad (24)$$

где $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n+1$. Полученные формулы (23), (24), (18), (19) выражают эластичности доли доходов потребителей $\varepsilon(q_{ji}, p_{jk})$ при $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n+1, k = 1, 2, \dots, n+1$, и $\varepsilon(q_{ji}, R_j)$ при $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n+1$, только через эластичности цены по доходу $\varepsilon(p_{ji}, R_j)$ при $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n+1$, и коэффициенты α_{jik} при $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n+1$. Таким образом, для вычисления эластичностей спроса необходимо и достаточно вычислить эластичности цены по доходу. Эластичности спроса выражаются через эластичности цен по доходу следующим образом:

$$\varepsilon(V_{ji}, p_{jl}) = \frac{1}{\varepsilon(p_{jl}, R_j)} (\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{jik} \varepsilon(p_{jk}, R_j) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{jik} + 2 - 2\varepsilon(p_{ji}, R_j)),$$

$$j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, n+1.$$

$$\varepsilon(V_{ji}, R_j) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{jik} \varepsilon(p_{jk}, R_j) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{jik} + 2 - 2\varepsilon(p_{ji}, R_j),$$

$$j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n.$$

Список использованных источников.

1. Габбасов М.Б. Математическая теория о спекулянте на рынках валют. – V Международная научная конференция «Проблемы уравнений, анализа и алгебры», г. Актобе, 2009 г.

2. Габбасов М., Заурбеков С., Биахметов А. Об одной задаче о спекулянте на рынках валют. – Труды II Международной научно-практической конференции Информатизации общества, г. Астана, 2010 г.

БІЛІМ БЕРУДЕГІ МУЛЬТИМЕДИАЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯ

Гумарова А.К., Аканова К.М.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

E-mail: gumarova.aisulu5@gmail.com

Өз кезегінде, ақпараттық және телекоммуникациялық технологиялар халықтың түрлі салаларында, соның ішінде білім беру салаларында тезірек және жылдам таралуда[1]. Білім беру жүйелерінің әртүрлі модельдерінің дамуындағы заманауи тәсілдер мен үрдістер болашақ ұрпақтың үйлесімді дамуында ғылым мен жоғары технологиялар үлкен рөл атқаратын және жалпы білім беру үдерісінің сапасын айқындайтын әлемде өмір сүріп жатқанымызды көрсетеді. Оқу орындарын компьютерлендіру қажеттілігі күн сайын артып келеді[2]. Себебі оқу үрдісінде электрондық жарияланымдар ерекше рөл атқаруда. Қазіргі кезде олар білім берудің ең қарқынды дамып келе жатқан сатыларының бірі. Оның ішінде электрондық оқулықтарға аса мән берілуде.

Электронды оқулық – курс материалдарын зерттеуге арналған әдістемелік кешен. Бұл теорияны, тәжірибені, тапсырмаларды және басқа компоненттерді қамтитын кешенді құрал.

Электронды оқулықта түрлі ақпараттық технологияларды қолдану дәстүрлі оқулықпен салыстырғанда үлкен дидактикалық артықшылықтар береді:

- мультимедиялық технологияларда ақпарат көрнекі және визуалды ұсынылады, бұл әсіресе жасөспірімдер үшін оқыту ортасын тартымды жасайды;
- ақпараттың едәуір көлемін бір ортаға интеграциялайды;
- кез-келген қажетті сұрауға қажетті ақпаратты тез және дәл анықтауға мүмкіндік береді.
- гипермәтін түрінде ақпаратты жеке ұйымдастыру және құрылымдау мүмкіндігі.
- мультимедиялық функциялар оқу материалында иллюстрацияларды ғана емес, сонымен бірге музыкалық және бейнематериалдарды пайдалануға мүмкіндік береді. Бұл оқытудың сапасын жақсартуға және білім алушының назарын әлдеқайда жақсырақ сақтап қалады.
- интерактивті өзін-өзі тексеру жүйесі білім алушыға өз білім деңгейін бағалауға, бақылау және емтиханға даярлануға мүмкіндік береді.

Қазіргі жағдайда білім берудің кейбір мәселелерің бірден-бір шешімі қашықтықтан оқыту. Бүгінгі таңда қашықтықтан оқыту бүкіл әлемде кеңінен танымал болып келеді. Қашықтықтан білім беру жүйесін қолданатын институттар мен мектептердің желілері ашылуда. Бұл электронды оқыту құралдарының, атап айтқанда электрондық оқулықтардың үлкен санын жасауды талап етеді. Себебі қашықтықтан оқыту барысында білім алушы көп жағдайда өздігінен жұмыс істейді, сондықтан электрондық оқулық қашықтан оқытудың негізгі білім беру құралы, сонымен қатар біліктілігін және білім деңгейін жоғарылатуға, екінші білім алу, беделді университеттен, колледжден және т.б. диплом алу мүмкіндігін береді.

Заманауи жағдайда оқу орнының қоғамдағы рөлі өзгереді, демек білім алушының оқу орнындағы білімге деген көзқарасы өзгереді. Көптеген білім алушылар оқыту уақытын қысқартуды қалайды. білім беруді кәсібилендіру үрдісі арта түседі, сондықтан электронды оқулық, мұндай жағдайда, пәнді өз бетінше зерттеуге және болашақ мамандыққа дайындығы үшін ең жақсы таңдау болып табылады.

Электронды оқулықты құру жұмысын келесідей кезеңдерге бөлуге кеңес беріледі:

1. Оқулық әзерленіп жатқан аудиторияны бағалау
2. Мәтіндік және графикалық ақпаратты жинау және дайындау
3. Мазмұнды дайындау
4. Электронды оқулық дизайнын нақтылау
5. Электронды оқулықты тікелей жасау

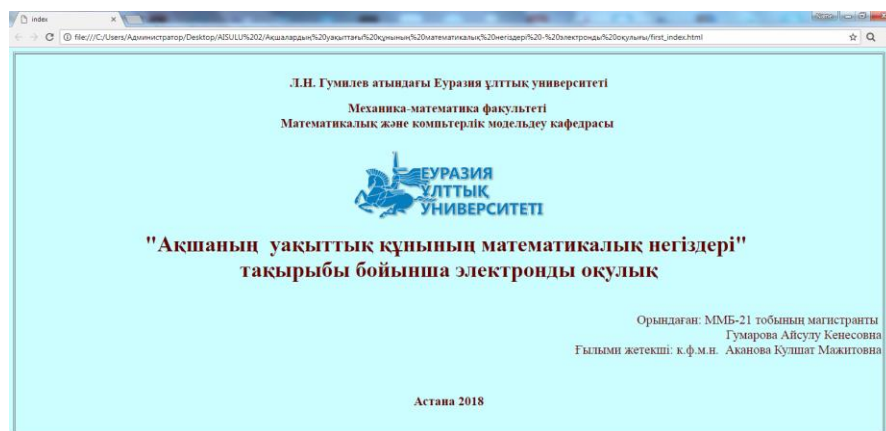
Электронды оқулықты жасау процесі дәстүрлі оқулықты жасау процесінен өте ерекшеленеді. Сондықтан, дәстүрлі оқулықты сканерлеу тиімді емес.

Электронды оқулықты жасаған кезде, аз мәтінді қамтуы керек екенін ескеру керек, себебі компьютер экранынан мәтінді ұзақ уақыт бойы оқып-үйрену қиынға соғады және жаңа ақпаратты қабылдауды азайтады. Мәтінің қаріпін таңдау өте маңызды, қаріптер теориясымен танысқан жөн. Электронды оқулықта барынша көп графикалық бейнелер болуы керек, себебі иллюстрациялық оқулықтарды оқығанда ақпаратты ұғыну мен қабылдау әлдеқайда жоғары. Материалды зерттегенде түстер білім алушыға күш салмау үшін дұрыс түстер гаммасын таңдау маңызды, мақсат жайландыратын түстер таңдалу керек. Сондай-ақ, электронды оқулықта бейне және аудио үзінділер, оқулықтың элементтеріне және Интернетте басқа да ақпараттарға гиперсілтемелер қолдану ұсынылады. Бұндай бейне және аудио үзінділерді пайдалану ақпаратты динамикада беруге және білім алушылардың қызығушылығын арттыруға мүмкіндік береді, осылайша сіңімділікті арттырады. Интерактивті өзін-өзі тексеру жүйесі білім алушыға өз білім деңгейін бағалауға, бақылау және емтиханға даярлануға мүмкіндік береді[3]. Электронды оқулықтарда білім алушы материалды қалай меңгергенін тексеруге мүмкіндік беретін кіріктірілген тестілеу жүйесі болуы мүмкін. Бұл білім алушыға өз білім деңгейін бағалауға, бақылау және емтиханға даярлануға мүмкіндік береді.

Электронды оқулық құрылымы

«Ақшаның уақыттық құнының математикалық негіздері» оқу курсына құрылған электронды оқулық бакалавриат және колледж білім алушылары, сонымен қатар қарапайым халық кредит пен құнды қағаз пайыздарын есептеуде, лизингті операцияларда, инвестицияланған капиталдың кірісін анықтауда және жоба өтімділігінің мерзімін анықтауда, сонымен қатар инфляция әсерін анықтауда ақша қаражатының уақыттық құны әдістерін қолдануға үйретеді. Сонымен қатар электронды оқулық номиналды және нақты экономикалық шамаларды есептеу әдістемесі және соның негізінде Қазақстан Республикасының макроэкономикалық көрсеткіштеріне бағалау жүргізу әдістемесі, кредиттер мен инвестицияны бағалау ақша қаражатының уақыттық құны әдістері, экономика көрсеткіштеріне инфляция әсерін бағалау тақырыптарын қамтиды.

Электронды оқулық интернеттегі веб-беттерді құратын HTML гипермәтіндік белгілеу тілі арқылы құрастырылған[4,5,6]. Оқу құралы негізгі файл first_index.html көмегімен іске қосылды. Жұмыс оқулықтың тақырыптық бетінен, 1-суретте көрсетілгендей басталады. Онда оқу құралы атынан бөлек, автор, факультет, кафедра, қала және шығарылған жылы көрсетілген.



1-сурет

Суретке басқанда электронды оқулықтың жұмыс беті ашылады.

Электронды оқулық мәзірі келесі тізімнен тұрады:

- Басты бет
- Дәрістер курсы
- Лабораториялық тапсырмаларды орындау әдістемесі
- Лабораториялық тапсырмалар
- Тест
- Видео сабақтар
- Excel-дің қаржылық функциялары
- Әдебиеттер тізімі

Басты бет – оқулықтың тақырыбын ашатын қысқаша түсініктемеден тұрады.

Дәрістер курсы – аталған курс бойынша 9 тақырыптық дәрістен тұрады. Әрбір дәрістің тақырыпбы, мақсаты, жоспары және соңында өзін-өзі тексеру сұрақтары бар. Тақырыптар жеңілден күрделіге қарай орналасқан. Оқырманға түсінікті және жеңіл болуы үшін дәріс ортасында мысалдар келтірілген.

Лабораториялық тапсырмаларды орындау әдістемесі – бұл бөлім дәріс тақырыбына сәйкес тақырыптардан тұрады. Яғни әрбір дәрістің лабораториялық тапсырмаларын орындау әдістемелері көрсетілген. Әдістемеде тапсырмаларды орындаудың екі жолы көрсетілген: аналитикалық шешу жолы және интерактивті шешу жолы. Интерактивті шешу жолынды Microsoft Excel-дің математикалық-экономикалық функциялары қолданылады.

Берілген табыс деңгейіндегі тәуекел активтерінің оңтайлы портфельін таңдау тақырыбы бойынша бір мысал есеп келтірейік.

Мақсаты: Капитал активтерінің баға белгілеу моделдерін (Capital Asset Pricing Model – CAPM) құрып, есептеуді үйрету

Мысал. Портфель жасау есебін қарастырайық (мысалы құнды қағаздар).

3 актив бар болсын – A,B,C, (құнды қағаздар түрлері: акциялар, облигациялар, депозиттер). Олардан күтілерін табыс сәйкесінше 0,11; 0,15 және 0,08; тәуекелдер сәйкесінше 1; 1,2 және 0,9. Портфель тәуекелі 1,1-ден артық болмауы керек, ал $\beta_A = 1$, $\beta_B = 1,2$, $\beta_C = 0,9$. Әрбір активтер үлесі W_a, W_b, W_c деп белгіленеді және портфель менеджерімен анықталады. β максималды тәуекел деңгейінде максимал табыс алу үшін әр активтердің оңтайлы пропорцияларын анықтаңыз. 1-кестеде көрсетілген.

1-кесте

Тәуекел өлшемі	A	B	C	β
β_i	1	1,2	0,9	1,1
Табыс	0,11	0,15	0,08	

Математикалық моделдің құрылуы:

1) *Мақсат*: берілген табыс деңгейінде пайданы максималдау (тәуекелді минималдау)

$$F = 0,11W_a + 0,15W_b + 0,08W_c \rightarrow \max$$

2) *Параметрлер* – барлық сандық мәліметтер

3) *Басқарушы айнымалылар* W_a, W_b, W_c – салмақтар

4) *Шектеулер*:

а) портфельдегі β 1,1 артпау керек: $W_A + 1,2W_B + 0,9 W_C \leq 1,1$

б) барлық активтер салмақтары теріс емес болу керек:

$$0 \leq W_A \leq 1, 0 \leq W_B \leq 1, 0 \leq W_C \leq 1$$

в) құралдар түгелімен инвестициялануы керек: $W_A + W_B + W_C = 1$

Сонымен, функцияны максималдайтын **математикалық модель** алынады

$$F = 0,11W_a + 0,15W_b + 0,08W_c \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\begin{cases} W_a + 1,2W_b + 0,9W_c \leq 1,1 \\ 0 \leq W_a \leq 1, \quad 0 \leq W_b \leq 1, \quad 0 \leq W_c \leq 1 \\ W_a + W_b + W_c = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Яғни (2) шартын қанағаттандыратын және (1) функцияның мәнін максимумға айналдыратын $W = (W_a, W_b, W_c)$ жоспарын табу керек.

Интерактивті шешу әдісі.

1. Microsoft Excel-ге шартта берілген акрпараттар 2-суреттегідей теріледі

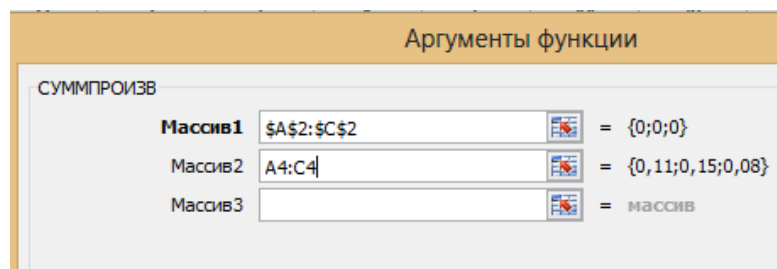
	A	B	C	D	E	F
1	Wa	Wb	Wc			
2						
3	Активтер салмағының коэф-рі			F мәні		
4	0,11	0,15	0,08			
5						
6	Шектеулер:					
7	1	1,2	0,9		<=	1,1
8	1	1	1		=	1
9	1				<=	1
10		1			<=	1
11			1		<=	1
12						

2-сурет

2. Мақсатты D4 ұяшығын ерекшелеп, меңзер сол жерге орнатылады →  санаттан *математические* таңдалады → *суммпроизвед*:

1 массив → A2:C2 бос ұяшықтарды есептейміз; F4 батрмасымен бекітеміз;

2 массив → A4:C4 ұяшықтарын 3-суреттегідей есепейміз (активтер салмағының коэффициенттері) → ОК, «0» шығады.

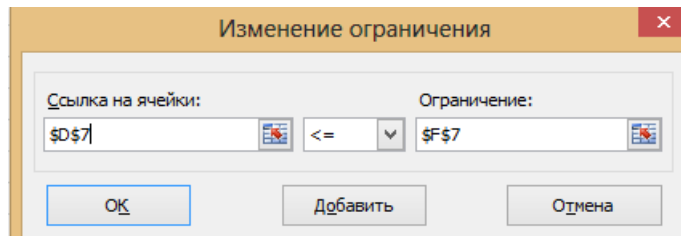


3-сурет

3. D4 ұяшығын көшіріп, D7:D8 бағанына қойылады.

4. D4 ұяшығына меңзерді қойып → *Данные* → *Поиск решения* (егер орнатылмаған болса, онда «надстройки» және қанат белгісін қойып, орнату керек).

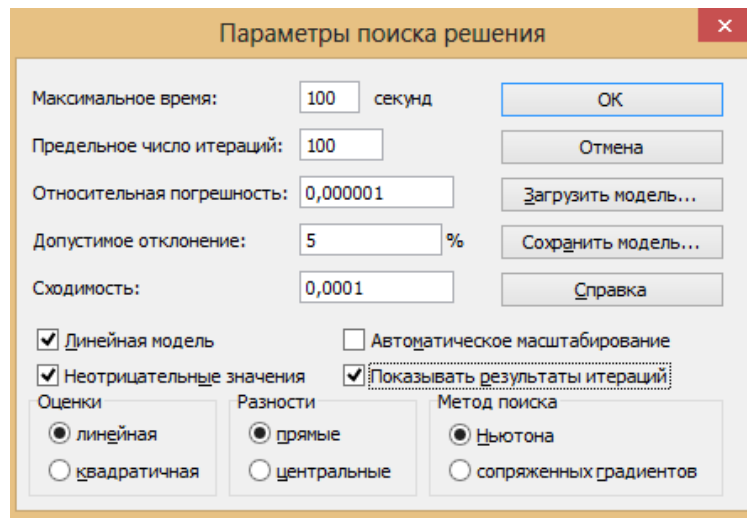
- Мақсатты D4 ұяшығын «максимумға» теңестіріп қою керек;
- *Изменяя ячейки*: W_a, W_b, W_c астындағы ұяшықтар таңдалады – A2:C2;
- *Ограничения*: *Добавить* → ұяшықтар ссылқасына: C7 → шектеуге F7 ұяшығы 4-суреттегідей таңдалады → 1-ші шектеуге ұяшығы енгізіледі.



4-сурет

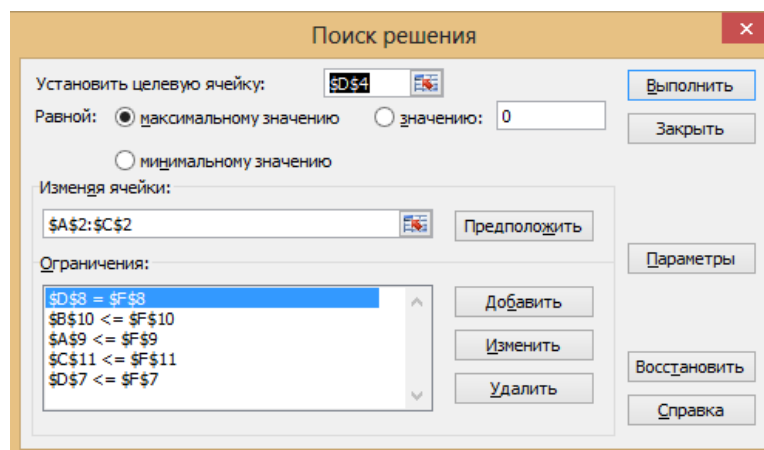
Осылайша қалған шектеулер 5-суреттегідей енгізіледі (айнымаллылардың теріс емес шартын *Параметрлер* бөлімінде беруге болады), ОК.

- *Параметры*: ☒ *Линейная модель* ☒ *Неотрицательные значения*
- ✓ *Показывать результаты итераций*, белгілеу керек, ОК



5-сурет

• 6-суреттегі *Выполнить* → жалғастырылады («шешімі табылды» хабарлама шыққанға дейін). Шектеулер қалай орындалып жатқанын бақылау керек.



6-сурет

• «Решение найдено» → тип отчета → результаты, ОК → «отчет по результатам» беті пайда болады (7-сурет).

	A	B	C	D	E	F
1	Wa	Wb	Wc			
2	0,5	0,5	0			
3	Активтер салмағының коэф-рі			F мәні		
4	0,11	0,15	0,08	0,13		
5						
6	Шектеулер:					
7	1	1,2	0,9	1,1	<=	1,1
8	1	1	1	1	=	1
9	1				<=	1
10		1			<=	1
11			1		<=	1

7-сурет

Шешімдердің экономикалық интерпретациясы: егер 0,5 акция және 0,5 облигация алатын болсақ, она портфель максималды пайда табады және ол 0,13 тең. Сонымен тиімді жоспары $W = (0,5; 0,5; 0)$ тең және $F = 0,13$.

Сонымен қатар көрсетілген мысал есептің 8-суретте көрсетілген «Есепті жүргізілген файлды» басу арқылы интерактивті жолмен шешілген файлды жүктеу мүмкіндігі бар. Басқаша айтқанда оқырман әр есепке жеке шаблонды жүктеу отырып түрлі тәжірибелер жүргізе алады.

Басты бет

Дәрістер курсы

Лабораториялық тапсырмаларды орындау әдістемесі

✓ 1. Пайыздар теориясының негізгі ұғымдары мен анықтамалары. Жай пайыздар.

2. Күрделі пайыздар. Күрделі және жай пайыздардың айырмашылығы.

3. Ағымдағы ақша құны және дисконт.

4. Пайыздың негізгі қолданыстары.

5. Аннуитет және оның өлшемдері.

1. Пайыздар теориясының негізгі ұғымдары мен анықтамалары. Жай пайыздар.

Мақсаты: Пайыздың практикалық қолданысын көрсету, жай пайыздардың есептелу жолдарын көрсету.

Мысал 1. Егер алғашқы салым сомасы 1000 у.е., 20% пайыз үстемесі тоқсан сайын есептелінетін болса, 1 жылға өсім сомасын және пайыздар сомасын анықтау керек.
Шешуі: Аналитикалық шешімі (1.13) формула бойынша есептеледі.

$$I = 1000 \cdot 0,2 = 200 \text{ у.е.}, S = 1000 + 200 = 1200 \text{ у.е.}$$

Интерактивті шешу әдіс.

Ол үшін Microsoft Excel-ді ашып, ұяшықтарға шартта берілген ақпараттар теріледі.

	A	B
1	Функция аргументтері	Мәндері
2	Алғашқы сома (P)	1000
3	Пайыз үстемесі (i)	20%
4	Пайыздың есептелу периодының саны (n)	4
5	Пайыздар сомасы (I)	
6	Өсім сомасы (S)	

Алдымен пайыздар сомасы анықталады:

Есептеу жүргізілген файл.

Мысал 2. Егер алғашқы қарыз сомасы 20000 у.е. жарты жылға 28% пайыз үстемесімен берілген болса, өсім сомасы қанша болады.

8-сурет

Лабораториялық тапсырмалар бөлімі дәріс тақырыбына сәйкес өздік жұмысқа арналған есептер жинағынан тұрады. Есептер соңында жауаптары көрсетілген. Бұл оқырманғын өз жауабымен тексеру мүмкіндігін береді.

Тест – білім алушы өз білімін тексере алатын тест орналасқан. Тест сұрақтарына жауап берілген соң, тексеруге жібереді. Нәтижесінде жалпы қанша сұраққа жауап бергені, оныны қаншасына дұрыс жауап бергені және сонын пайыз түріндегі қорытындысы шығады.

Видео сабақтар – оқулықтың бірден бір ерекшелігі білім алушы тақырыпты жете түсінуі үшін видео материалдар қарау мүмкіндігі көрсетілген.

Excel-дің қаржылық функциялары бөлімі лабораториялық тапсымаларда қолданылатын Excel-дің қаржылық функцияларының тізімі көрсетілген. Әр функцияға түсініктеме берілген.

Әдебиеттер тізімі – тақырыптарды тереңірек ұғынуға, өздік ізденіске қажет болатын, ең қажетті әдебиеттер тізімі көрсетілген. Кейбір әдебиеттерді жүктеу мүмкіндігі бар.

Жұмыстың мақсаты болған орта буын оқырмандардың қаржылық сауаттылығын арттыратын қазіргі білім талаптарына сай құрастырылған электронды оқулық қолдануға жеңіл, түсінікті функцияларымен жабдықталған, электронды оқулық талаптарына сай құрастырылған.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

- 1 Баркова Е.Е., Фандрова Л.П. Преимущества и недостатки электронных учебников и их место в современном образовании // Научное сообщество студентов XXI столетия. Гуманитарные науки: сб. ст. по мат. XXXVII междунар. студ. науч.-практ. конф. № 10(37). URL: [http://sibac.info/archive/guman/10\(37\).pdf](http://sibac.info/archive/guman/10(37).pdf) (дата обращения: 19.04.2018)
- 2 Хожиев А. Х. Особенности, преимущества и эффективность электронных учебников по специальным дисциплинам, применяемых в профессиональных колледжах // Молодой ученый. – 2012. – №2. – С. 311-313. – URL <https://moluch.ru/archive/37/4255/> (дата обращения: 19.04.2018).
- 3 Явич М.П. Электронный учебник, его преимущества и недостатки // Современные научные исследования и инновации. 2012. № 10 [Электронный ресурс]. URL: <http://web.snauka.ru/issues/2012/10/16884> (дата обращения: 12.01.2018).
- 4 Гаевский, А.Ю.; Романовский, В.А. Создание Web-страниц и Web-сайтов. HTML и JavaScript. – Технолоджи-3000, 2008. – 464с. – ISBN 9785893923612.
- 5 Квинт, Игорь Создаем сайты с помощью HTML, XHTML и CSS / Игорь Квинт. – М.: Питер, 2014. – 448 с.
- 6 Исси Коэн, Лазаро; Исси Коэн, Джозеф Полный справочник по HTML, CSS и JavaScript. – ЭКОМ Паблишерз, 2007. – 1168с. – ISBN 9785979000091.

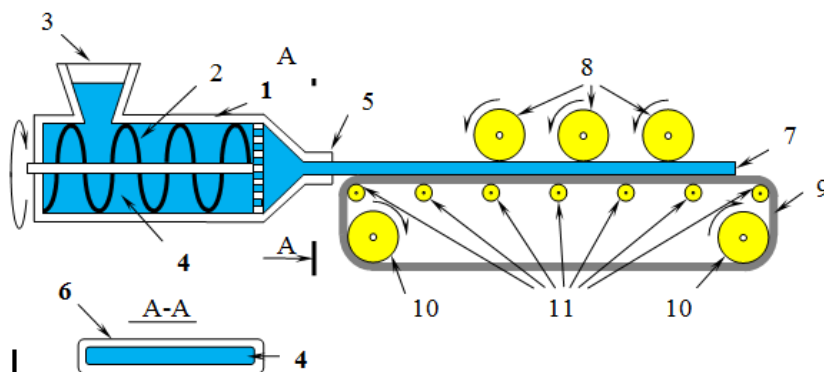
МӨЛШЕРЛЕУ ЗОНАСЫНДА ЭКСТРУЗИЯ ҮРДІСІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІН ӨНДЕУ

Доумчариева Ж.Е., Есеналиева М.К.

М.Х.Дулати атындағы Тараз мемлекеттік университеті, Тараз, Қазақстан

E-mail: zhanagul78@mail.ru

Экструзия – бұл заманауи, жоғары автоматтандырылған үздіксіз, полимерлі материал балқытпасын пішіндейтін құрылғы (ұштық) арқылы басу жолымен жүзеге асырылатын, қажет пішіндегі бұйымдар мен жартылай фабрикаттарды өндіру үрдісі. Экструзияны: түйіршіктерді, парақшалар, пленкалар, құбырлар, бейінді және үрленетін бұйымдарды, қағазға жұқа жабушаларды, маталар, қатты қағаз, пластмасса окшаулаудағы сымдар және кабельдерді дайындау үшін қолданады.



1 – экструдер, 2 – шнек, 3 – жүктеуші бункер, 4 – пластикалық ұнтақты салмақ, 5 – мундштук, 6 – шығу ойығының профилі, 7 – экструдирленген қабат, 8 – роликтер, 9 – тіректегі қозғалушы лента, 10 – жетектік дабылдар, 11 – роликтер.

Сурет 1. Экструзиялық машина сұлбасы

Экструзия әдісімен бізге белгілі барлық термопластикалық полимерлер және олардың негізіндегі орындаулар жасап шығарылады.

Бір шнекті экструдер өнімділігі.

Әдетте экструдер нақты бұйымды дайындайтын (пленка, парактар, құбыр және т.б.) агрегат құрамына кіреді. Әрбір нақты жағдайда экструзиялық машиналарға ерекше талаптар қойылуы мүмкін. Бірақтан ортақ болып сапалы өнімді минималды шығынмен алу табылады. Сондықтан үлкен назар олардың көнімділігі мен қайта іңдеудің нақты параметрлеріне тәуелді тұтынылатын қуатты анықтауға бөлінеді.

Ньютоның идеал сұйықтықтар үшін ағу заңдарынан және Навье-Стокс теңдеуінен математикалық түрлендірулер және шнек параметрлер қою жолымен экструдердің көлемдік өнімділігін есептеу үшін формулалар алынды ($\text{см}^3/\text{с}$):

$$Q = An - B \frac{P}{\eta_k} - C \frac{P}{\eta_3} \quad (1)$$

Мұнда A – шнектің спиральді арнасында балқытпаның тура ағынын сипаттайтын коэффициент, см^3 ;

$$A = \frac{\pi^2 D^2 h \sin \varphi \cos \varphi}{2} \quad (2)$$

B — шын мәнінде жоқ, кері ағын сипаттамасы, см^3 .

$$B = \frac{\pi D h^3 \sin^2 \varphi}{12 L} \quad (3)$$

η_3 — шнектің спиральді арнасындағы тиімді тұтқырлық, $\text{Па} \cdot \text{с}$; C — ағудың кері ағынының сипаттамасы, см^3 ;

$$C = \frac{\pi^2 D^2 \delta^2 \tan \varphi}{10 L e} \quad (4)$$

η_3 – шнек жотасы мен цилиндрдің ішкі қабырғасы арасындағы саңылаудағы тиімді тұтқырлық, $\text{Па} \cdot \text{с}$; D — шнек диаметрі, см ; P — шнек соңындағы қысым (ұштыққа кірістегі), Па ; h — ойық тереңдігі, см ; φ — винтті сызықтың көтеру бұрышы, град; L — шнек ұзындығы, см ; p — шнектің айналу жылдамдығы, об/с .

Егер ағудың кері ағыны өте аз екенін назарға алсақ (әсіресе жаңа экструдерлер үшін), онда өнімділікті есептеу формуласын (3.13) былай жазуға болады:

$$Q = \frac{\pi^2 D^2 h \sin \varphi \cos \varphi}{2} n - \frac{\pi D k^3 \sin^2 \varphi}{12 L^2} \quad (5)$$

(3.5) формула ойық тереңдігі мен қадамы тұрақты экструдер өнімділігін есептеуге мүмкіндік береді. Ол кезде шнектің айналу жиілігіне, шнек соңындағы қысымға және балқытпаның тиімді тұтқырлығына тәуелді болады. Бұл параметрлерді экструзияның технологиялық процессінде негізгі деп санауға болады. Мұнда балқытпа тұтқырлығы тәуелді цилиндр аймақтары бойынша және ұштық температурасын қосу керек. Бұл температуралар термомеханикалық қисықтардан алынатын фазалық өтпелердің температуралары негізінде таңдалады.

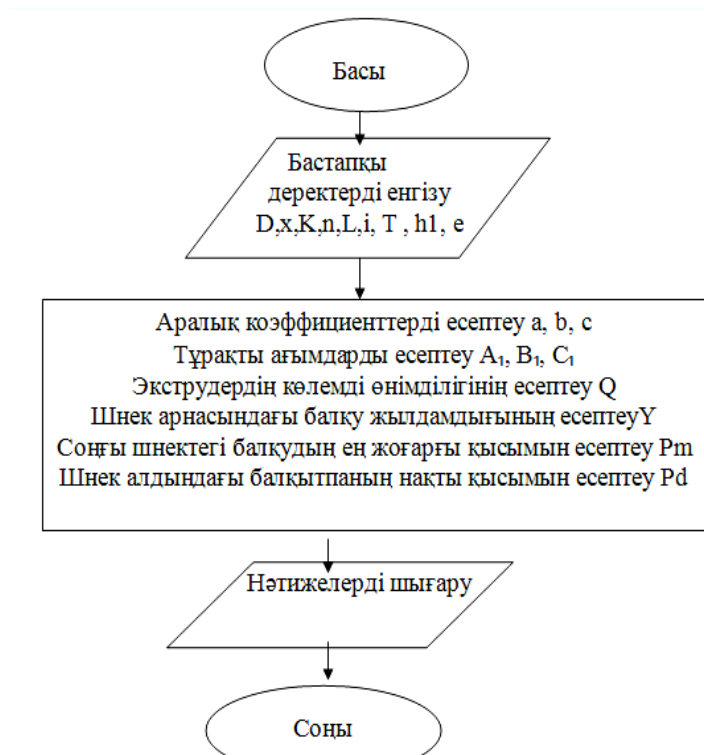
Жоғары қысымдағы полиэтилендердің тығыздығы температураға тәуелділігі

Экструдер өнімділігі ұштық арқылы өтетін балқытпа саны бойынша да анықтала алады, Q_0 ($\text{в см}^3/\text{с}$):

$$Q = K - \frac{P_\Gamma}{\eta_\Gamma} \quad (6)$$

Экструдерлердің құрылыстық және технологиялық параметрлерін нақты шешімдерін тек заманауи ЭЕМ пайдалана отырып табады. Экструдердің материалды түрлі бұйымдарға қайта өңдеу кезінде машинаның техникалық мүмкіндіктерін анықтауға мүмкіндік беретін жанамаланған тексеруші есептеулерін белгілі бір ақауларды жібереді.

Қарастырылған математикалық тәуелділіктердің негізінде тапсырманы шешу блок-схемасын құраймыз. Жасалған блок-схемасы 2-суретте келтірілген.



Сурет2. Блок -схемасы

Экструдердің, қайта өңделетін материалдың барлық негізгі сипаттамалары және технологиялық түзімнің параметрлері алдын ала белгілі деп болжанады.

Бағдарламаны құру және оны ЭЕМ-де шешу

Тапсырма шарты: бір шнекті экструдердің шамамен өнімділігін есептеу.

Бастапқы деректер

Шнектің диаметрі, см

D:=11

Ойық тереңдігі, см

$h_{cp} := 0,8$

Көтерілу бұрышы град

$\alpha := 17$

Айналу жиілігі, айн/мин

n:=55

Шнек ұзындығы, см

$L_H := 12 * D$

Тығыздығы, кг/м³

$\rho := 810$

Температура, град

T:=130

Өндірімділікті есептеу

Градусты радиандарға ауыстыру

$$\alpha := \frac{\alpha * \pi}{180}$$

1. Балқу тұтқырлығын анықтау

1.1. Молшерлеу аймағындағы спиральды каналдың тереңдігі h_2 (см)

$$(0.12-0.16) * D : h_1 := 0.14 D, \text{см}$$

Ораушы материалдың дәрежесі, өңделетін материалдың типіне тәуелді болады (1-6):
i:=3,2

$$h_3 := 0.5 * \left[D - \sqrt{D^2 - \frac{4 * h_1}{i} * (D - h_1)} \right] h_3 = 0.431$$

Бөлу тереңдігінің орта мәні

$$h_{CP} := \frac{h_1 + h_3}{2} h_{CP} := 0.985$$

$$\gamma := \frac{\pi * D * n}{60 * h_{CP}} \gamma := 32.148$$

2. Соңғы шнектегі балқудың ең жоғарғы қысымын анықтаймыз

шнектің кесу- қадамы $(0,8-1,2)D$, см $t=1.1D$

$$tg_{\phi} := \frac{t}{\pi * D} tg_{\phi} = 0.35$$

Мөлшерлеу аймағының ұзындығы $(3-5)t$, см

$$L_{\Delta} := 4 * t \quad L_{\Delta} := 48.4$$

$$P_M := \frac{\pi * D * L_{\Delta} * \eta * n}{60 * h_{CP}^2 * tg_{\phi}} \quad P_M = 5.547 * 10^6 \text{ Па}$$

3. Бір шнекті экструдердің өндірімділігін анықтаймыз $\frac{\text{см}^3}{\text{мин}}$

$$Q := \frac{\pi^2 * D^2 * h_{CP} * \sin(\alpha) * \cos(\alpha)}{2} * n - \frac{\pi * D * h_{CP}^3 * \sin(\alpha)^2}{12 * L_H} * \frac{P_M * 60}{\eta}$$

$$Q = 8565.133$$

өңдеу температурасы кезіндегі балқу тығыздығы $\rho=810$

$$Q_B := \frac{60 * Q * \rho}{10^6} \frac{K^2}{\text{ч}} \quad Q_B = 416.265$$

Шнек өнімділігін есептеу

Бір шнекті экструдердің өнімділігін есептеу

Бастапқы берілгендер	мандер
Шнектің диаметрі (D), см	20
шнектің батуының саны (X)	1
Айналу жиілігі, айн/мин (n)	30
бастыс пішіндерінің коэффициенті (K)	0.0055
ондеулер температурасы (T)	180
Шнек аймағының ұзындығы (Ln)	0.7

Бастапқы берілгендер	
Шнек ?зындығы, L=	700
Накты кадамы, t=	22
Ойы? тере?дігі, см, h1=	3
Шнектің басының ені, e =	1.8

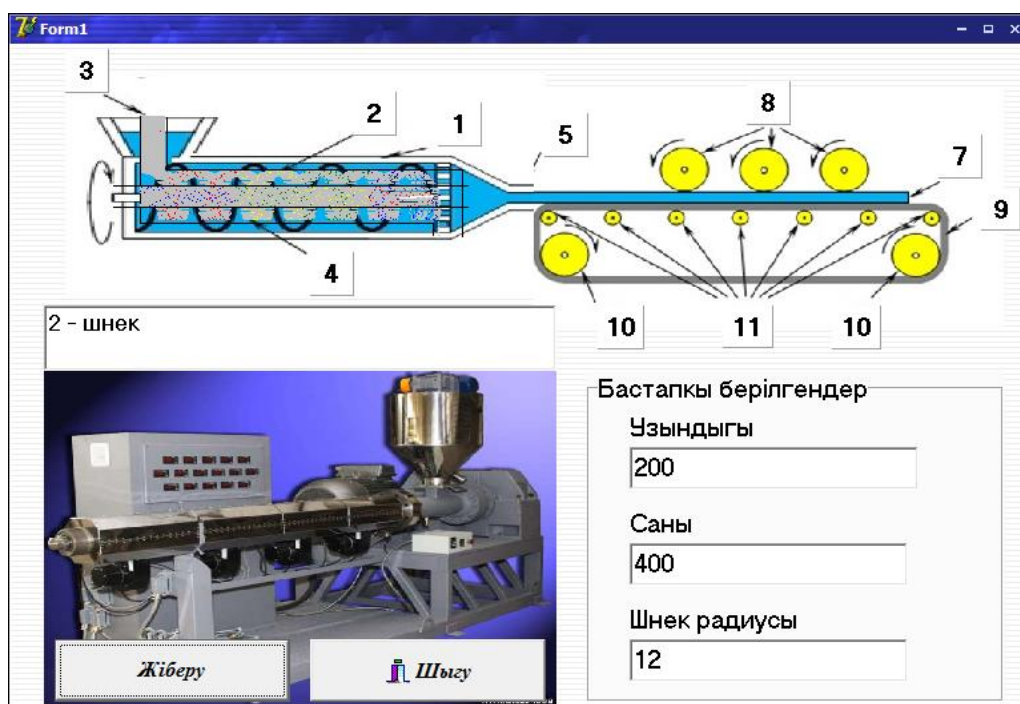
Нәтижелер

Lc= 699.3	g= 96.352	$\gamma_v = 22.95$	Q= 556.67	Pd= 12773.86	$\gamma = 32.148$
h3= 1.368661	a= 6.673	m1= 3.255272	a2= -0.447534	h11= 2.8	Ld= 48.4
h2= 2.518706	b= 0.009	m2= 2.698970	b2= 2.673016	h22= -0.8	Pm= 5547000
d1= 14	A1= 5469	$\gamma_1 = 1.301029$	mv= 4.546	h33= 0.431	
d2= 14.962586	B1= 0.022	$\gamma_2 = 2.544068$	Pm= 19160.8	hcp= 0.985	

Бір шнекті экструдердің өндірімділігі: Q1 = 8565.133 Qb = 416.265463

Сурет 3. Бір шнекті экструдердің өнімділігін есептейтін бағдарлама терезесі

Мөлшерлеу аймағындағы экструзия математикалық моделін қолдану нәтижесінде тұрақты тереңдіктегі және айнымалы ойық қадамындағы экструдер үшін келесі мәліметтер алынды: өнімділік $Q=8565.133 \text{ см}^3/\text{мин}$ немесе $Q=416.265 \text{ кг/час}$. Құрылған модельді қолдану бір шнекті экструдер параметрлерін таңдау мен өнімділікті есептеу үшін қолданылады.



Сурет 4. Экструзиялық машинаның программадағы көрінісі және анимациясы

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Полосин А. Н. Моделирование и оптимизация процессов смешения термопластичных материалов в одношнековых экструдерах // Информационные технологии моделирования и управления. — 2009. — № 2. — С. 297–305.
2. Воскресенский А. М., Ищенко М. А. Компьютерные модели свойств и переработки полимерных композиций. — СПб.: СПбГИ (ТУ), 2008. — 66 с

3. Иванов Д.А., Литвинцева И.В., Вальяно Г.Е., Фатеева Л.В. Особенности структуры керамических композиционных материалов, полученных методом направленной реакционной пропитки. огнеупоры и техническая керамика, №8, 2000, с. 14-20.

ЖАЗЫҚ МЕХАНИЗМДЕРДІ КОМПЬЮТЕРЛІ МОДЕЛЬДЕУ ЖӘНЕ КИНЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУ

Дузельбаев С.Т., Ертай С.Н., Карейбаева Ф.С., Тукешова Г.А., Омарбекова Ә.С.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
E-mail: gulzada.tukeshova@mail.ru

Зерттелетін тақырыптың мақсаты: жазық иінбілікті механизмдерге кинематикалық талдау жүргізіп, компьютерлік моделін жасау. Сондай-ақ, кинематикалық талдауды аналитикалық әдісте жүргізіп, MathCAD бағдарламасында қозғалысын көрсету.

Зерттеудің мәселелері:

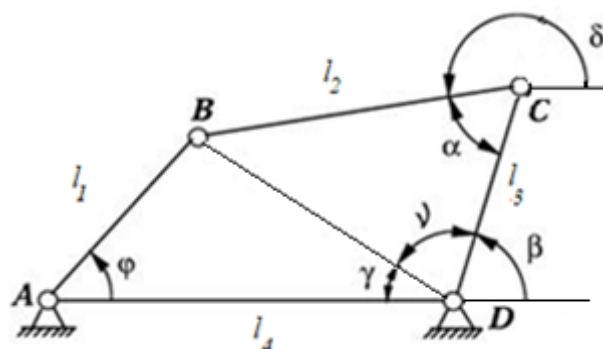
- MathCAD бағдарламасында жұмыс жасап үйрену;
- Қосиінді-күйенте механизмімен танысу;
- Қосиінді-күйенте механизмін аналитикалық әдісте кинематикалық талдау жүргізу.

Иінбілікті механизмдерді есептеу және зерттеу кезінде аналитикалық әдістер қолданылады. Графикалық әдістердің, қазіргі кезде есептеудің дұрыстығын бақылау кезінде қосымша мәні бар. Иінбілікті механизмдердің орналасуын аналитикалық анықтау әдістерінің ішінде барлық механизмдерге пайдаланылатын тек қана екі жалпы әдіс бар. Бұлар Ю.Ф.Морошкиннің координаталарды түрлендіру және В.А.Зиновьевтің тұйықталған векторлық контурлар әдістері болып табылады [1]. Жазық механизмдер үшін соңғы әдіс - ең қарапайым әдіс болады. Сондықтан да оны техникада кеңінен кездесетін II классты жазық механизмдерге қолданамыз.

В.А.Зиновьев әдісінде әрбір иінбілікті механизмінің құрылымы бір немесе бірнеше тұйықталған векторлық контурлар түрінде бейнеленеді. Олардың әрқайсысы үшін орналасу, жылдамдықтар және үдеулер теңдеулері құрылады және шешіледі. Бұл кинематикалық тізбектің әр бөлігінде әр түрлі орналасқан бірдей сипаты және құрылымдық топтары бар әр түрлі механизмдер үшін есептік формулаларды шығаруда қайталауға әкеледі. Механизмнің кинематикасының зерттелуін анимация түрінде компьютердің дисплейінде көрсетуге болады.

Иінбілікті-күйентелі (қосиінді-күйенте) механизмінің кинематикалық талдауы

Механизмнің буындарының жылдамдықтары мен үдеулерін аналитикалық түрде анықтау үшін β бұрышының кірмелі буынның ϕ бұрышымен аналитикалық байланысын табу қажет. Табылған бұрыштарды пайдаланып әр нүктенің орны анықталады. Содан кейін олардан уақыт бойынша бірінші ретті туындылары алынып жылдамдықтары анықталады. Дәл солай жылдамдықтарды уақыт арқылы бір рет туындылап үдеулер анықталады.



1-сурет. Қосиінді-күйенте механизмі

Бағдарлама коды:

Reference: C:\Program Files (x86)\Mathcad\подпрограмма.xmcd

Берілгені:

$$l_1 := 0.416 \quad l_2 := 0.999 \quad l_3 := 0.715 \quad l_4 := 1 \quad \omega_1 := \frac{\pi}{3} \quad t := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1} \quad \phi(t) := \omega_1 \cdot t$$

С нүктесінің орнын анықтау үшін $\beta(t)$ бұрышын, және оны табуға қажетті бұрыштарды $\phi(t)$ бұрышы арқылы өрнектейік:

$$\nu(t) := \arccos \left[\frac{\left[(l_1)^2 - (l_2)^2 + (l_4)^2 \right] + (l_3)^2 - 2 \cdot l_1 \cdot l_4 \cdot \cos(\phi(t))}{2 \cdot l_3 \cdot \sqrt{(l_1)^2 + (l_4)^2 - 2 \cdot l_1 \cdot l_4 \cdot \cos(\phi(t))}} \right]$$

$$\gamma(t) := \arcsin \left[\frac{l_1 \cdot \sin(\phi(t))}{\sqrt{(l_1)^2 + (l_4)^2 - 2 \cdot l_1 \cdot l_4 \cdot \cos(\phi(t))}} \right]$$

$$\beta(t) := \pi - \nu(t) - \gamma(t)$$

В және С нүктелерінің радиус векторлары:

$$R_B(t) := \begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\phi(t)) \\ l_1 \cdot \sin(\phi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_C(t) := \begin{pmatrix} l_4 + l_3 \cdot \cos(\beta(t)) \\ l_3 \cdot \sin(\beta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

мұндағы матрицалардың бағандарындағы өрнектер В және С нүктелерінің сәйкесінше, Ох, Оу, Оz осьтеріне проекцияларын көрсетеді

В нүктесінің жылдамдығы мен үдеуі:

$$v_B(t) := \text{Diff}_v(R_B, t, 1) \quad \alpha_{v_B}(t) := \text{angle}(v_B(t)_0, v_B(t)_1) \cdot \text{deg}^{-1}$$

$$a_B(t) := \text{Diff}_v(R_B, t, 2) \quad \alpha_{a_B}(t) := \text{angle}(a_B(t)_0, a_B(t)_1) \cdot \text{deg}^{-1}$$

С нүктесінің жылдамдығы мен үдеуі:

$$v_C(t) := \text{Diff}_v(R_C, t, 1) \quad \alpha_{v_C}(t) := \text{angle}(v_C(t)_0, v_C(t)_1) \cdot \text{deg}^{-1}$$

$$a_C(t) := \text{Diff}_v(R_C, t, 2) \quad \alpha_{a_C}(t) := \text{angle}(a_C(t)_0, a_C(t)_1) \cdot \text{deg}^{-1}$$

Механизмнің орнын анықтайық. Ол үшін 1x4 өлшемді матрица құрып әр нүктенің Ох, Оу осьтеріне проекцияларын қоямыз :

$$X_{\text{meh}}(t) := \begin{pmatrix} 0 & l_1 \cdot \cos(\phi(t)) & l_4 + l_3 \cdot \cos(\beta(t)) & l_4 \end{pmatrix}$$

$$Y_{\text{meh}}(t) := \begin{pmatrix} 0 & l_1 \cdot \sin(\phi(t)) & l_3 \cdot \sin(\beta(t)) & 0 \end{pmatrix}$$

А және D нүктелері қозғалмайтын болғандықтан, В және С нүктелерінің траекторияларын көрсетейік:

$$\Delta t := \frac{2 \cdot \pi}{180 \cdot \omega_1} \quad i := 0..180 \quad t_i := i \cdot \Delta t$$

$$X^{(i)} := (R_B(t_i)_0 \quad R_C(t_i)_0)^T$$

$$Y^{(i)} := (R_B(t_i)_1 \quad R_C(t_i)_1)^T$$

В және С нүктелерінің жылдамдықтары мен үдеулерінің векторларын тұрғызайық. Ол үшін, ең алдымен, жылдамдық векторлары мен үдеу векторларының масштабын қоямыз. Содан соң, жылдамдықтар мен үдеулерді векторларға меншіктеп, Ох пен Оу осьтеріне проекциялаймыз.

$$Mv := 0.5$$

$$v_c(t) := \text{vector7}(R_C(t)_0, R_C(t)_1, v_C(t)_0, v_C(t)_1, Mv)$$

$$v_b(t) := \text{vector7}(R_B(t)_0, R_B(t)_1, v_B(t)_0, v_B(t)_1, Mv)$$

$$v_x(t) := \text{augment}(v_b(t)^{(0)}, v_c(t)^{(0)}) \quad v_y(t) := \text{augment}(v_b(t)^{(1)}, v_c(t)^{(1)})$$

$$Ma := 0.2$$

$$a_c(t) := \text{vector5}(R_C(t)_0, R_C(t)_1, a_C(t)_0, a_C(t)_1, Ma)$$

$$a_b(t) := \text{vector5}(R_B(t)_0, R_B(t)_1, a_B(t)_0, a_B(t)_1, Ma)$$

$$a_x(t) := \text{augment}(a_b(t)^{(0)}, a_c(t)^{(0)}) \quad a_y(t) := \text{augment}(a_b(t)^{(1)}, a_c(t)^{(1)})$$

Механизмнің графигін саламыз.

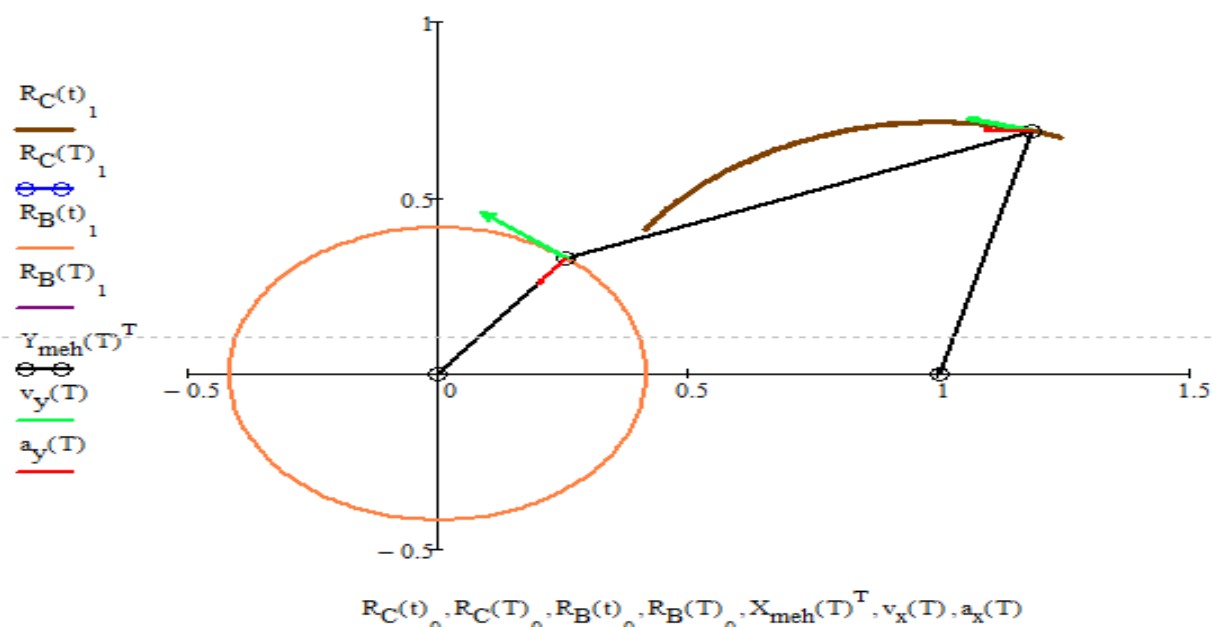
$$T :=$$



$$T_{\text{deg}} := \frac{T}{90}$$

$$T = 78$$

$$\frac{\omega_1 \cdot T}{\text{deg}} = 52$$



В және С нүктелерінің сипаттамаларының сәйкес мәндері:

$$R_B(T) = \begin{pmatrix} -0.334 \\ 0.248 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_B(T) = \begin{pmatrix} -0.26 \\ -0.349 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_B(T) = \begin{pmatrix} 0.366 \\ -0.272 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{v_B}(T) = 233.333 \quad \alpha_{a_B}(T) = 323.333$$

$$R_C(t) = \begin{pmatrix} \{181,1\} \\ \{181,1\} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_C(T) = \begin{pmatrix} -0.312 \\ -0.208 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_C(T) = \begin{pmatrix} 0.264 \\ -0.061 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{v_C}(T) = 213.697 \quad \alpha_{a_C}(T) = 346.947$$

Есептің бас жағында «подпрограмма» сілтемеде ішкі бағдарлама сақталған.

→ Reference:C:\Program Files (x86)\Mathcad\подпрограмма.xmcd

2 –сурет.Ішкі бағдарлама

Төмендегі суреттерден ішкі бағдарламалардың кодтарын көре аламыз.

```
Diff_v(r,t,n) := (return error("ololo") if (n < 0) ∨ [(n - trunc(n)) ≠ 0]
(ARow ACol) ← augment(rows(r(t)),cols(r(t)))
return r(t) if (n = 0)
i ← ORIGIN
for k ∈ i..i + ARow - 1
  for j ∈ i..i + ACol - 1
    vk,j ←  $\frac{d^n}{dt^n} r(t)_{k,j}$ 
v
```

3 –сурет. Дифференциалдаудың ішкі бағдарламасы

```
vector7(x,y,Lx,Ly,m) := R0 ←  $\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x & x \\ y & y & y & y & y & y & y \end{pmatrix}^T$ 
I1 ←  $\begin{pmatrix} 0 & 0.92 & 0.85 & 1 & 0.85 & 0.92 \\ 0.01 & 0.01 & 0.05 & 0 & -0.05 & -0.01 \end{pmatrix}^T$ 
I2 ←  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}^T$ 
I ← stack(I1,I2)
Ω ←  $\begin{pmatrix} Lx & Ly \\ -Ly & Lx \end{pmatrix}$ 
R0 + m·I·Ω
```

4 –сурет. Жылдамдық векторының ішкі бағдарламасы

```
vector5(x,y,Lx,Ly,m) := R0 ←  $\begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ y & y & y & y & y \end{pmatrix}^T$ 
I ←  $\begin{pmatrix} 0 & 0.95 & 0.85 & 1 & 0.85 & 0.95 \\ 0 & 0 & 0.03 & 0 & -0.03 & 0 \end{pmatrix}^T$ 
Ω ←  $\begin{pmatrix} Lx & Ly \\ -Ly & Lx \end{pmatrix}$ 
R0 + m·I·Ω
```

5 – сурет. Үдеу векторының ішкі бағдарламасы

Қорытынды

Берілген жұмыста жазық механизмдерінің белгілі бір түріне аналитикалық әдісте кинематикалық талдау жүргізіп, шешімін сандық әдістегі MathCAD жүйесінде қозғалысы көрсетілді. Есеп нәтижесінде механизмнің қозғалысы анимация түрінде көрсетілді. Алынған нәтижелерді техникалық мамандықтардағы студенттер үшін «Машиналар мен механизмдер теориясы» курсынан көрнекті оқу құралы ретінде қолданылады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Зиновьев В.А. Курс теории механизмов и машин. – М.: Наука, 1975. – 384 с.
2. Дүзелбаев С.Т., Омарбекова Ә.С. Есептеу механикасы. – Алматы: ҚР ЖООҚ. – ЖШС «Дәуір», 2011. – 312.

КОМБИНАЦИЯЛЫҚ ЦИФРЛІК ҚҰРЫЛҒЫНЫ АРДУИНО ПЛАТФОРМАСЫНДА МОДЕЛДЕУ

Жантлесова Ә. Б., Жармакин Б. Қ.

Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

«ҚҒС» ҰҚ» АҚ, Астана, Қазақстан

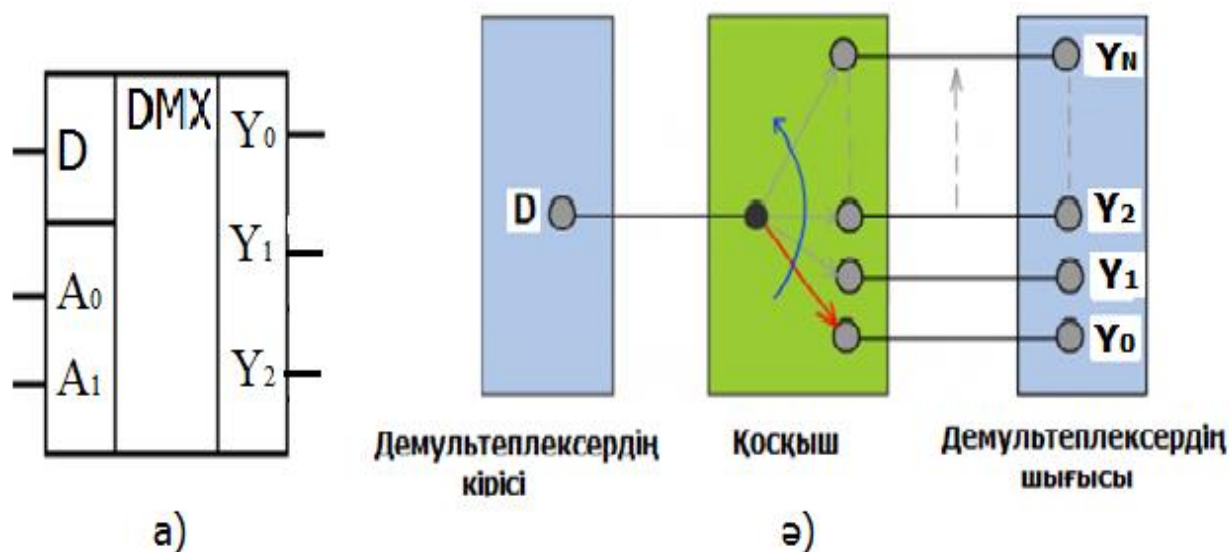
E-mail: acbzh@mail.ru, zbk_60@mail.ru

Комбинациялық цифрлік құрылғы (КЦҚ) - шығыс сигналдарының мәндері ағымдағы уақыттағы кіріс сигналдарының мәніне ғана тәуелді болатын құрылғы.

КЦҚ - ның жады элементтері жоқ, сондықтан шығыс сигналдары бұл құрылғыларда тек қана кіріс сигналдарының шамаларына сәйкес қалыптасады.

КЦҚ ретінде қолданылатын құрылғылар: кодерлер (шифлауыштар), декодерлер (қарсы шифлауыштар), мультиплексорлар және демультиплексорлар.

Демультиплексор — бұл бір ақпараттық кірістегі (D) сигналды бірнеше ақпараттық шығыстарға ($Y_0 - Y_2$) біріне қосатын комбинациялық цифрлік құрылғы. Демультиплексорларды сұлбалардағы шартты белгіленуі DMX немесе DMS. Бұл құрылғыны сигналдардың логикалық коммутаторы (қосқыш) ретінде қолданамыз. Ол бір ақпараттық кірістегі (D) сигналды, адрестік кірістердегі комбинацияға байланысты, құрылғыны шығысындағы бірнеше ақпараттық шығыстардың ($Y_0 - Y_n$) біріне қосады (Сурет 1).



Сурет 1 – Демультиплексордың шартты графикалық белгіленуі (а) және жұмыс атқару сұлбасы (ә)

Мысал үшін, біз екі адрестік кірісті және үш ақпараттық шығысты демультимплексорды қарастырайық. Жалпы, адрестік кірістер де, ақпараттық шығыстар да, 2 санының қандай – да бір дәрежесі түрінде алынады (2 – нің нөл дәрежесі 1 санын береді, бір дәрежесі 2 санын береді, екі дәрежесі 4 санын береді). Төменде, демультимплексордың моделін құрастырғанда, мысал ретінде алынған SN7411 микросұлбасында үш ЖӘНЕ элементі болғандықтан шығыстар саны 3 – ке тең болып алынған.

Коммутатор (қосқыш) адрестік кірістер (A_0 – A_1) арқылы басқарылады. Берілген ақпараттық кірістегі (D) сигналды (логикалық «0» немесе «1»), адрестік кірістердегі комбинацияға байланысты, құрылғының шығысындағы (Y_0 – Y_2) – тің біріне қосады. Бұл адрестік сигналдар кіріс сигналын шығыстағы қандай каналға қосу керектігін анықтайды.

Демультимплексордың жұмыс кестесін құрастырайық. Демультимплексордың жұмысы адрестік кірістердің комбинацияларына байланысты болады. Демультимплексордың кірісіне ақпараттық сигнал (D) логикалық «0» немесе логикалық «1» ретінде келеді. Сондықтан, ақпараттық кірістердің барлық комбинациясын ескерсек, бізде 6 комбинация болуы тиіс. (Кесте 1).

Кесте 1. Демультимплексордың жұмыс кестесі

№	Ақпараттық кіріс	Адрестік кірістер		Ақпараттық шығыстар		
	D	A_1	A_0	Y_2	Y_1	Y_0
1	0	0	0	*	*	0
2	1	0	0	*	*	1
3	0	0	1	*	0	*
4	1	0	1	*	1	*
5	0	1	0	0	*	*
6	1	1	0	1	*	*

Бұл жерде (*) – бейтарап жағдай. Сигналдың немесе логикалық «0» немесе логикалық «1» болуы мүмкін. Бірақ бұл сигналдардың мәндері құрылғылардың не кірісіне не шығысына ешқандай әсер етпейді.

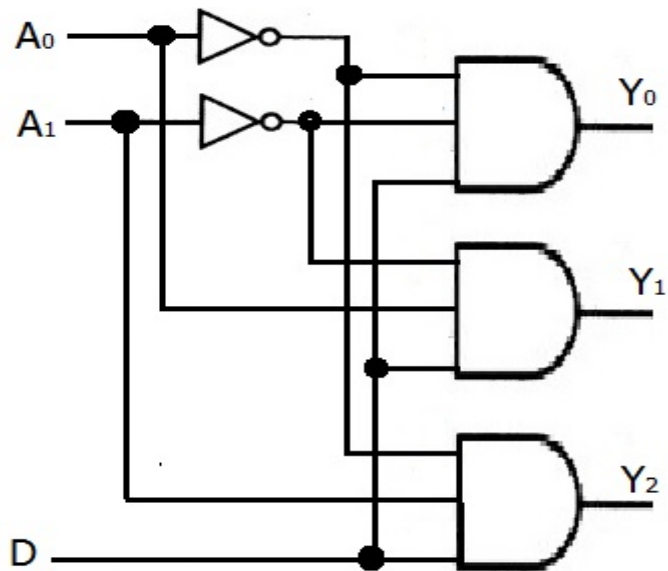
Осы кестені пайдаланып, демультимплексордың шығыс функциясының теңдеулерін алайық:

$$Y_0 = D \bar{A}_1 \bar{A}_0$$

$$Y_1 = D \bar{A}_1 A_0$$

$$Y_2 = D A_1 \bar{A}_0$$

Демультимплексордың құрамын анықтаймыз. Бізге үш кірісті үш ЖӘНЕ ЛЭ – і мен адрестік кірістерге екі инвертор (ЕМЕС) қажет болады. Инверторлар адрестік кірістерге, қажет болған жағдайларда логикалық «0» беру үшін қолданылады. (Сурет 2).



Сурет 2 – Демультиплексордың принципіалды сұлбасы

Демультиплексордың бағдарламасының листингі келесідей болады:

// Demultiplexer программасы

// Кіріс сигналдарды тағайындау

int ledPin1=13; //Ақпараттық сигнал D. D сигналына әрдайым логикалық «1» береміз

int ledPin2=12; //Адрестік сигнал A0

int ledPin3=11; //Адрестік сигнал A1

void setup(){

// ledPin – дерді шығыс сигналы етіп тағайындаймыз

pinMode(ledPin1,OUTPUT);

pinMode(ledPin2,OUTPUT);

pinMode(ledPin3,OUTPUT);

}

void loop() {

// Кірістерге мәндер беру

digitalWrite(ledPin1,HIGH);

digitalWrite(ledPin2,LOW);

digitalWrite(ledPin3,LOW);

delay(3000);

//3 секундтық кідіріс

digitalWrite(ledPin1, HIGH);

digitalWrite(ledPin2,HIGH);

digitalWrite(ledPin3,LOW);

delay(3000);

digitalWrite(ledPin1, HIGH);

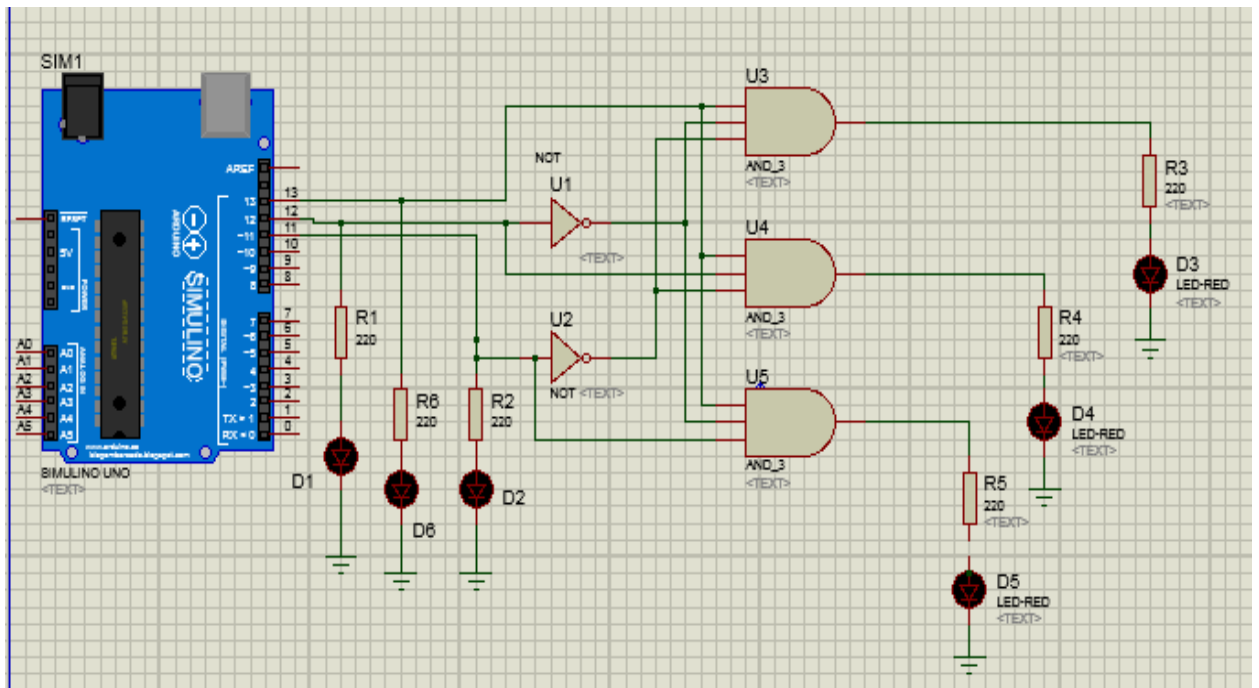
digitalWrite(ledPin2,LOW);

digitalWrite(ledPin3,HIGH);

delay(3000);

}

Құрылғымыздың PROTEUS – те прототипін құрастырып, программаның дұрыстығын тексереміз (Сурет 3).

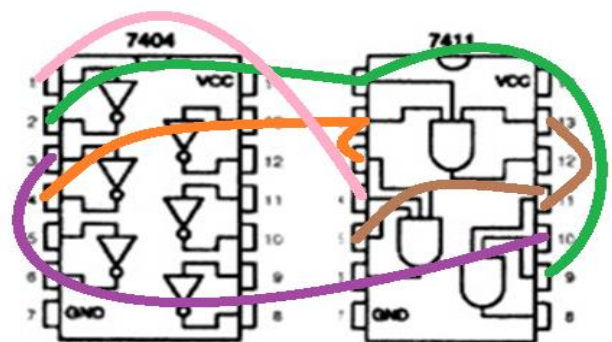
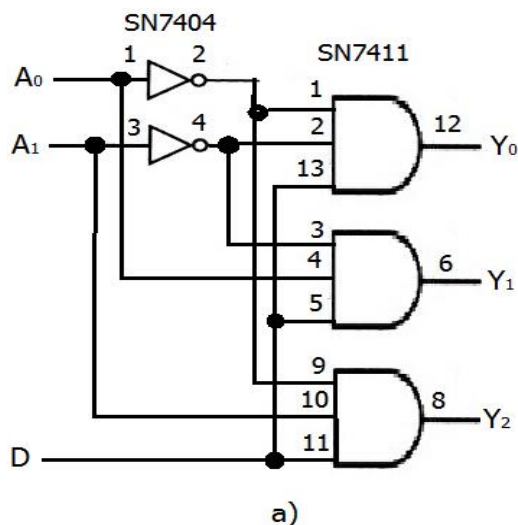


Сурет 3 –Демультитплексордың PROTEUS – тегі прототипі

Құрылғымыздың PROTEUS – тегі прототипін тексергеннен кейін, оны АРДУИНО платформасында жинақтауыш тақташада жинақтаймыз. Бізге қажет микросұлбалар – K155ЛИЗ (аналогы SN7411) және K155ЛН1 (аналогы SN7404). Аяқтарын нөмірлейміз. Бұл құрылғыны құрастырғанда шатасып кетпеу үшін жасалады. K155ЛИЗ (аналогы SN7411) микросұлбасының құрамы үш ЖӘНЕ компонентінен тұрады.

Осы суретте көрсетілгендей екі микросұлбаның өзара байланыстарын орнатайық:

- а) SN7404 – тің 1 – ші пині SN7411 – дің 4 - ші пиніне жалғанады (күлгін сары түсті) «папа – папа» сымымен қосылады;
- ә) SN7404 – тің 3 – ші пині SN7411 – дің 10 - шы пиніне жалғанады (көк сұр түсті) «папа – папа» сымымен қосылады;
- б) SN7404 – тің 2 – ші пині SN7411 – дің 1 – ші және 9 - шы пиндерге жалғанады (жасыл түсті) «папа – папа» сымдарымен қосылады;
- в) SN7404 – тің 4 – ші пині SN7411 – дің 2 – ші және 3 – ші пиндерге жалғанады (қызыл сары түсті) «папа – папа» сымдарымен қосылады (Сурет 4).

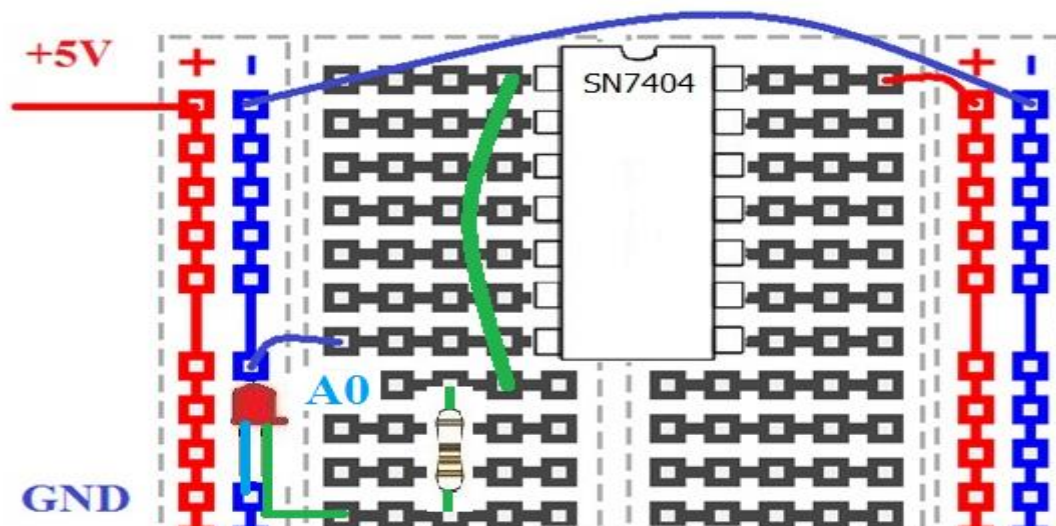


Сурет 4 - Демультитплексордың нөмірленген сұлбасы (а) және екі микросұлбаның өзара байланыстары (ә)

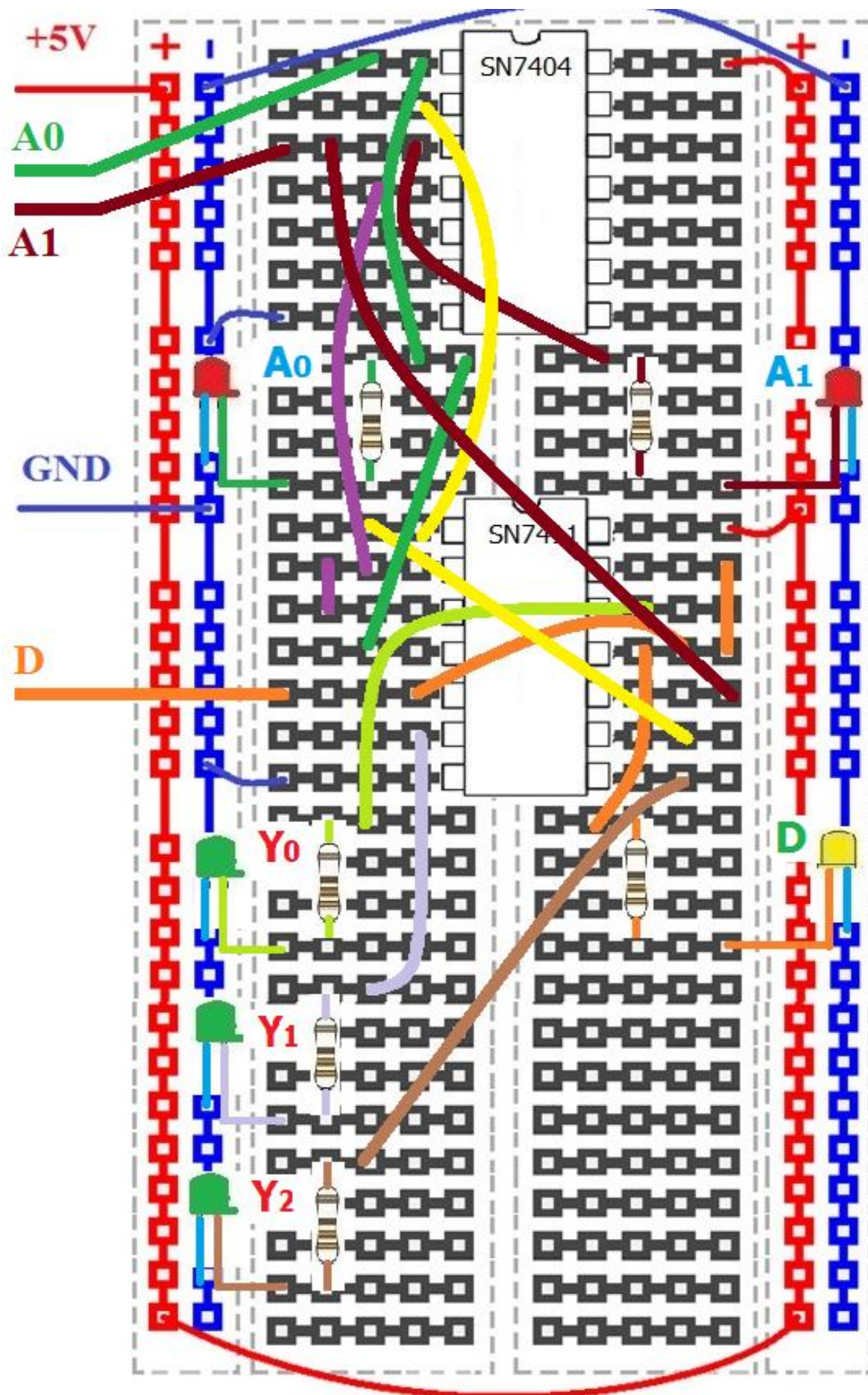
Жинақтауыш тақташада резисторлар мен жарық диодтарын орналастыруды қадаммен көрсетуге болады. Мысалы микросұлбаның 1 – ші аяғына компоненттерді жалғауды көрсетейік:

- а) d1 – d8 контакттары «папа – папа» сымымен қосылады;
- ә) резисторды c8 – c11 контакттарының арасына орналастырамыз;
- б) жарық диодынның қысқа аяғын (GND) «жер» - ге жалғау рельсіне қосамыз, ал ұзын аяғын a11 контактысына жалғаймыз (Сурет 5).

Қалған екі компонент дәл осы жолмен жинақталады. Ең соңында кіріс сигналдарын АРДУИНО – ға микросұлбаның 11 – ші, 12 – ші және 13 – ші кірістеріне жалғаймыз. Құрастырылған құрылғы жұмыс атқаруға дайын (Сурет 6). Дәл осы жолмен басқа да цифрлік құрылғыларды АРДУИНО платформасында моделдеуге болады.



Сурет 5 - Адрестік A0 кіріске резистор мен жарық диодын жалғау



Сурет 6 - Жинақтауыш тақташада толық құрастырылған демультиплексордың моделі

Пайданылған әдебиеттер

1. <http://www.arduino.cc>
2. <http://arduino.ua/ru/hardware/Nano>
3. Brian W. Evans – Arduino блокнот программиста (перевод книги «Arduino Programming Notebook»)
4. Массимо Бенци - Знакомство с Arduino (перевод книги «Getting Started with Arduino»)
5. В. Короблев – С и С++. К. Издательская группа BHV., 2002. – 432 с.
6. Дж. Ф. Уэйкерли - Проектирование цифровых устройств, т. 1. М.: Постмаркет, 2002. – 544 с.
7. <https://digitalelectronics.kz>
8. Б. К. Жармакин – «Разработка учебного стенда по имитационному моделированию элементов цифровой электроники» - Материалы Международной научной конференции «Казахстантану -7» 23 ноября 2012 г., г. Астана. Стр. 258 – 262;
9. «ARDUINO платформасының негізінде логикалық элементтер мен триггерлерді зерттейтін модель құрастыру» Бүртебаев Қ., Жұбаналин Н., Серіков Б., Л.Н.Гумилев атында ЕҰУ студенттері. Ғылыми жетекші - Б.К. Жармакин - Сборник Материалов XI Международной научной конференции студентов и молодых ученых «НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2016» - г. Астана 14 апреля 2016 г. – Стр. 98 – 101.
10. Б. К. Жармакин – Цифрлік электроника элементтерін ARDUINO платформасында құрастыру және бағдарламалау. Оқу құралы. Алматы.: Эверо баспасы., 2018. - 188 бет.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Жүзбаев С.С., Сабитова Д.С.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: juzbayev@mail.ru, dianasabitova@yahoo.com

Аннотация. Статья посвящена численному моделированию распространения упругих волн в неоднородных средах. Основываясь на уравнениях движения и соотношений обобщённого закона Гука были определены уравнения, описывающие малые динамические деформации в условиях плоской задачи. Была принята явная разностная схема и шаблон, построенные на основе метода бихарактеристик с добавлением идей расщепления по пространственным координатам. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных и угловых точек области.

Ключевые слова: волновые процессы, неоднородные среды, метод бихарактеристик, численное моделирование, определяющие уравнения, вектор скорости, тензор напряжений.

1. Введение

Математическое моделирование распространения волн в составных упругих средах актуально во многих отраслях, таких как строительство, конструирование, машиностроение и т.п. Для теоретического и прикладного исследования представляется важным изучение закономерностей развития контактного взаимодействия динамически деформируемых сред.

На сегодняшний день существует ряд математических методов исследования. В связи с развитием информационных технологий и доступности к вычислительным мощностям компьютеров, получили новое развитие численные методы решения: метод пространственных характеристик [1-4], метод конечных разностей [5], метод граничных интегральных уравнений [6, 7] и т.д.

2. Постановка задачи

Как показано на рисунке 1, пусть в декартовой системе координат прямоугольная полоса занимает область

$$D_1 = (0 \leq x_1 \leq L_2 \cap |x_2| \leq l),$$

а полуплоскость –

$$D_2 = (L_1 \leq x_1 \leq \infty \cap |x_2| \leq \infty) \setminus (L_1 \leq x_1 \leq L_2 \cap |x_2| \leq l).$$

Свойства линейно-упругих изотропных, разнородных материалов задаются плотностью ρ_k , параметрами Ламе λ_k и μ_k ($k=1,2$). В момент времени $t \leq 0$ тело находится в состоянии покоя.

$$v_{\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha_i}^{(k)} = 0 \quad (1)$$

где $v_{\alpha}^{(k)}$, $\sigma_{\alpha_i}^{(k)}$ – компоненты вектора скорости и тензора напряжений в k -том теле ($\alpha, i=1,2$).

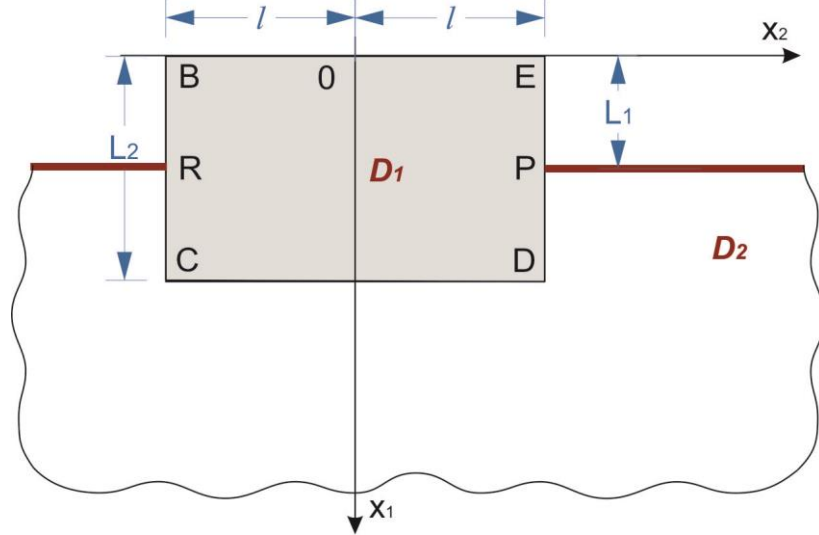


Рисунок 1 – Исследуемая область

В момент времени t_n ($n=1,150$) на нормальной границе $x_1 = 0$, $|x_2| \leq l$ прямоугольной полосы сообщается механическое возмущение, изменяющееся по закону:

$$\sigma_{11}^{(1)} = f(t), \quad \sigma_{12}^{(1)} = 0 \quad (2)$$

Остальные границы неоднородного тела свободны от напряжений:

$$\sigma_{ii}^{(2)} = 0, \text{ при } (i=1,2), x_1 = L_1, l \leq |x_2| < \infty; \quad (3)$$

$$\sigma_{i2}^{(1)} = 0, \text{ при } (i=1,2), |x_2| = l, 0 \leq x_1 \leq L_1 \quad (4)$$

Условия на контактных границах отвечают требованиям полного сцепления полосы и полуплоскости:

$$\sigma_{1i}^{(1)} = \sigma_{1i}^{(2)}, \quad v_i^{(1)} = v_i^{(2)}, \text{ при } (i=1,2), x_1 = L_2, |x_2| \leq l \quad (5)$$

$$\sigma_{i2}^{(1)} = \sigma_{i2}^{(2)}, \quad v_i^{(1)} = v_i^{(2)}, \text{ при } (i=1,2), L_1 \leq x_1 \leq L_2, |x_2| = l \quad (6)$$

Необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние неоднородной среды $D_1 \cap D_2$.

3. Численное моделирование в неоднородных средах

В данной статье для решения задач распространения волн в неоднородных средах рассматривается метод бихарактеристик с добавлением идей метода расщепления [8-10]. Ниже он использован для исследования плоских волновых процессов в полуплоскости с частично заделанной в нее полосой (рисунок 1).

Для решения задачи наряду с начальными (1) и граничными условиями (2-6) используется система, состоящая из уравнений движений и соотношений обобщенного закона Гука [11].

$$p_k U_{\alpha} = \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}; \quad \sigma_{\alpha_i}^{(k)} = \lambda_k \varepsilon_{ij}^{(k)} \delta_{\alpha_i} + 2\mu_k \varepsilon_{\alpha_j}^{(k)} \quad (7)$$

где $\varepsilon_{\alpha_j}^{(k)}$ – компоненты тензора деформации из соотношения Коши, δ_{α_i} – символ Кронекера, U_{α} – вектор перемещения, индексы (α, β, i, j, k) принимают значение 1, 2; причем $i \neq j$ и $(\alpha, \beta = i, j)$; нижними индексами после запятой обозначаются производные по соответству-

ющей пространственной переменной, точкой сверху – производные по времени; по дважды повторяющимся греческим индексам необходимо суммировать. Решение задачи удобно отыскивать в безразмерных величинах, которые получаются после введения обозначений как в [12].

Тело $D_1 \cap D_2$ линиями $x_1 = \text{const}$, отстоящими друг от друга на расстоянии h_i , делится на ячейки. Пересечения линий $x_1 = \text{const}$ образуют углы. Использование явной разностной схемы второго порядка точности позволяет установить значения неизвестных величин в узлах $t_n + \tau$ слоя (τ – шаг по времени) по известным их значениям в узлах слоя по времени t_n ($n=0,150$).

Принимается шаблон, состоящий из узла O и точек $\alpha_i^\pm$ ($i=1,2$), лежащих на координатных линиях $x_i = \text{const}$ и отстоящих от точки O на расстоянии $\gamma_1^{(k)}\tau$ и $\gamma_2^{(k)}\tau$ (рисунок 2). Наклонные прямые, исходящие из точки A , являются бихарактеристиками.

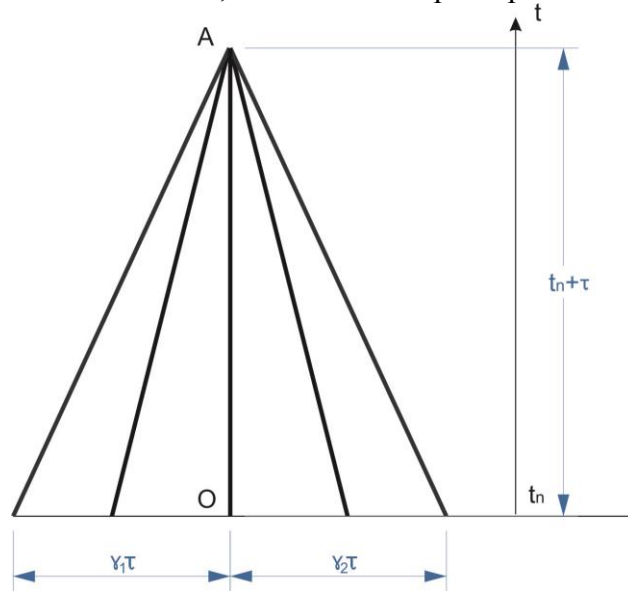


Рисунок 2 – Бихарактеристики на плоскости

В дальнейшем значениям функции в точке O приписываются верхний знак O , в точках $\alpha_i^\pm$ – нижний индекс α_i , а верхний знак $\pm$ (например, $\sigma_{\alpha_i}^{\pm(k)}$), в точке A дополнительный знак не приписывается. Шаг по времени τ выбирается из условия устойчивости схемы Кунгана-Фрэнсиса-Леви [12]. В безразмерной форме уравнения (7) имеют вид:

$$v_{\alpha}^{(k)} = \rho_k \sigma_{\alpha\beta\beta}^{(k)};$$

$$\sigma_{\alpha i}^{(k)} = (\gamma_1^{(k)} v_{i,i}^{(k)} + \gamma_3^{(k)} v_{j,i}^{(k)}) \delta_{\alpha i} + \gamma_2^{(k)} (v_{i,j}^{(k)} + v_{j,i}^{(k)}) (1 - \delta_{\alpha j}) \quad (8)$$

Разностные схемы. Система (8) расщепляется на две системы уравнений, соответствующие $\alpha=1$ и $\alpha=2$:

$$v_{\alpha}^{(k)} - p_k \sigma_{\alpha i,j}^{(k)} = A_{\alpha i}^{(k)};$$

$$\sigma_{\alpha i}^{(k)} - \gamma_1^{(k)} v_{\alpha j}^{(k)} = B_{\alpha i}^{(k)}, \quad (9)$$

здесь

$$A_{\alpha i}^{(k)} = p_k \sigma_{\alpha i,i}^{(k)};$$

$$B_{\alpha i}^{(k)} = \gamma_3^{(k)} v_{i,j}^{(k)} \delta_{\alpha i} + \gamma_2^{(k)} v_{j,i}^{(k)} \delta_{\alpha j}. \quad (10)$$

На характеристиках (рисунок 2)

$$dx_j = \pm p_k \gamma_i^{(k)} dt \quad (11)$$

должны быть выполнены условия [12]

$$d\sigma_{\alpha_i}^{(k)} \pm p_k \gamma_i^{(k)} dv_{\alpha}^{(k)} = (B_{\alpha_i}^{(k)} \pm p_k \gamma_i^{(k)} A_{\alpha_i}^{(k)}) dt, \quad (\alpha=1, i=1,2) \quad (12)$$

Уравнения (9) и условия (12) используются для отыскивания решения задачи (1-7). Интегрирование методом трапеции уравнения (9) от точки O и соотношений (12) от точек $\alpha_i^{\pm}$ до точки A (рисунок 1) позволяет получить разностные уравнений для внутренних точек области $D_1 \cap D_2$ [12].

$$\begin{aligned} v_{\alpha}^{(k)} &= v_{\alpha}^{0(k)} + \frac{\tau}{2} (A_{\alpha_i}^{(k)} + p_k \sigma_{\alpha_{i,j}}^{(k)} v_{\alpha}^{0(k)}); \\ \sigma_{\alpha_i}^{(k)} &= \sigma_{\alpha_i}^{0(k)} + \frac{\tau}{2} (B_{\alpha_i}^{(k)} + \gamma_j^{(k)} v_{\alpha_j}^{(k)} + \sigma_{\alpha_i}^{0(k)}) \end{aligned} \quad (13)$$

и

$$\sigma_{\alpha_i}^{(k)} - \sigma_{\alpha_i}^{\pm(k)} \pm p_k \gamma_i^{(k)} (\gamma_{\alpha}^{(k)} - v_{\alpha}^{\pm(k)}) = \frac{\tau}{2} |B_{\alpha_i}^{(k)} + B_{\alpha_i}^{\pm(k)} \pm p_k \gamma_i^{(k)} (A_{\alpha_i}^{(k)} + A_{\alpha_i}^{\pm(k)})| \quad (14)$$

Значения функций в не узловых точках $\alpha_i^{\pm}$ вычисляются по формуле Тейлора около узловой точки с точностью до второго порядка относительно шага по времени τ [12]. Исключая неизвестные $\sigma_{\alpha_i}^{(k)}$, $v_{\alpha}^{(k)}$ из (14), при помощи (13), можно получить восемь уравнений относительно производных в расчетном слое времени $t_n + \tau$:

$$p_k \gamma_i^{(k)^2} v_{\alpha_i} \pm p_k \gamma_i^{(k)} \sigma_{\alpha_{i,j}}^{(k)} = p_k \gamma_i^{(k)^2} (v_{\alpha_i}^{0(k)} + \tau v_{\alpha_i}^{0(k)}) \pm (\sigma_{\alpha_{i,j}}^{0(k)} + \tau \sigma_{\alpha_{i,j}}^{0(k)}) p_k \gamma_i^{(k)} \quad (15)$$

Складывая и вычитая поочередно соответствующие пары уравнений из (15), можно найти неизвестные производные $v_{\alpha_i}^{(k)}$, $\sigma_{\alpha_{i,j}}^{(k)}$, $(\alpha=1, i=1,2)$.

$$\begin{aligned} v_{\alpha_i}^{(k)} &= v_{\alpha_i}^{0(k)} + \tau v_{\alpha_i}^{0(k)}; \\ \sigma_{\alpha_{i,j}}^{(k)} &= \sigma_{\alpha_{i,j}}^{0(k)} + \tau \sigma_{\alpha_{i,j}}^{0(k)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Систему уравнений (16) можно использовать для определения неизвестных, как во внутренних, так и в граничных узловых точках исследуемой области $D_1 \cap D_2$. Подстановка равенств (16) в (13) позволяет получить неизвестные $\sigma_{\alpha_i}^{(k)}$, $v_{\alpha}^{(k)}$ во внутренних узловых точках тела в момент времени $t_n + \tau$.

На граничных линиях $x_i = \text{const}$ заданы два компонента напряжения (2-4). В расчетах не могут быть использованы условия (15) на двух характеристиках, не принадлежащих области $D_1 \cap D_2$. Тем самым, по сравнению с внутренними точками число уравнений (15) сокращается на 2. Совокупность оставшихся уравнений (13), (15) и двух граничных условий (2-4) является замкнутой линейной системой относительно тринадцати неизвестных (восьми производных и пяти функций). Точки контактных линий CR , PD и CD рассматриваются как граничные точки отдельных областей D_1 , D_2 . В каждой из этих точек число уравнений (13), (15) равно 22, а неизвестных – 26. Замкнутая система уравнений получается, если наряду с (13), (15) использовать условия жесткого сцепления (5), (6).

В угловых точках B и E заданы четыре компонента тензора напряжений. В силу закона парности касательных напряжений только три из них являются линейно независимыми. В расчетах должны отсутствовать условия (15) на четырех характеристиках, не принадлежащих области $D_1 \cap D_2$. Число неизвестных производных можно сократить непосредственным дифференцированием граничных функций (2), (4) вдоль границы получают производные $\sigma_{12,1}^{(1)} = 0$ и $\sigma_{12,2}^{(1)} = 0$. Уравнения относительно $\sigma_{12}^{(1)}$ из системы (13) при $\sigma_{12}^{(1)} = 0$ превращается в тождество. Остальные неизвестные вычисляются при последовательном решении уравнений (13) и (15).

4. Заключение

Методика расчета, описанная в данной статье, может быть использована для анализа напряженно-деформированного состояния и особенностей распространения волн в плоских неоднородных телах при действии продольных, поперечных и импульсных нагрузок.

Рассматриваемый метод показал высокую точность и устойчивость, что, в свою очередь, говорит о широком спектре прикладного значения данного метода и возможности его использования для решения различных волновых задач.

Список используемых источников

1. Клифтон Р. Разностный метод в плоских задачах динамической упругости // Механика. Сборник переводов. 1968. - № 1. - С. 103-122.
2. Тарабрин Г.Т. Разностные схемы волновых задач теории упругости: монография / Г. Т. Тарабрин; ВолгГТУ. - Волгоград: РПК "Политехник", 2000. - 148 с.
3. Kukudzhyanov V.N. Numerical Continuum Mechanics. De Gruyter, 2012. XVIII, 425 pages.
4. Рекер В.В. Прикладная механика // Серия Е.-1970. - №1. - Б. 121-129.
5. Айтиалиев Ш.М., Масанов Ж.К., Баймаханов И.Б., Махметова Н.М. // Численные методы решения задач механики деформируемого твердого тела, Караганда, 1987. с.3-15.
6. Баженов В.Г., Гоник Е.Г., Кибец А.И., Шошин Д.В. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях. Прикладная механика и техническая физика, 2014. Т. 55, №1, с.13-22.
7. Айтиалиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.А., Жанбырбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих много связанных тел. - Алма-Ата: Гылым, 1992. - С. 228.
8. Джужбаев С.С., Каримбаев Т.Д. Сложное напряженное состояние в основании сваи при циклическом его нагружении. // Тезисы докладов научно-технической конференции «Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения», Киев, 1992, стр. 18.
9. Байтелиев Б.Т., Джужбаев С.С., Метод бихарактеристик в пространственных задачах линейной теории наследственности. // Тезисы докладов Всесоюзного Симпозиума по реологии грунтов, Волгоград, 1985, стр. 37-38
10. Akhmetova Z., Zhuzbaev S., Boranbayev S. The method and software for the solution of dynamic waves propagation problem in elastic medium. Acta Physica Polonica A, Polish Academy of Sciences.-2016, Vol.130. - pp. 352-354, ISSN 0587-4246.
11. Джужбаев С.С., Купешев Б.К. Распространение двумерных волн напряжений в трансверсально-изотропной пластинке. Деп. В КаНИИНТИ 1.07.87. №4 (186), с. 192-198.
12. Джужбаев С.С., Каримбаев Т.Д. Динамическое деформирование четвертьплоскости с упругой вставкой при боковом импульсном нагружении. Деп. В КаНИИНТИ 30.11.89. №11 (217)б с. 175-183.

ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДОВ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ УЧЕТА И АНАЛИЗА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Искаков А., Әбдірей Б.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: a.iskakov99@gmail.com, baubek_aktobe@mail.ru

Казахстан находится в самом центре Евразийского континента, является мостом между Европой и Азией, вблизи быстрорастущих рынков Китая, России и Индии. Выгодное географическое положение, макроэкономическая, социальная и политическая стабильность создали в Казахстане один из самых привлекательных инвестиционных климатов в регионе.

Если рассматривать динамику последних 10 лет, основной объем прямых иностранных инвестиций был привлечен в период реализации Государственной программы индустриально-инновационного развития на 2010-2014 годы. Одним из значимых результатов программы является то, что сегодня в каждом третьем секторе промышленности имеется производство с участием иностранных инвесторов. Это стало возможным благодаря значительному улучшению инвестиционного климата в стране.

Инвестиции в информационные системы управления тесно связаны с такими понятиями как инновации и инвестиции.

Инновационный процесс включает научно-исследовательские, опытно-конструкторские, проектно-технологические и экспериментальные работы, а также работы

по производству (изготовлению) и эксплуатации новой продукции, новых технологических процессов и новых способов организации производства, труда и управления [2].

Этапы и методы проектного анализа инвестиций

Проектный анализ инвестиций включает в себя два основных этапа.

Этап 1. Анализ эффективности инвестиционного проекта.

Этап 2. Анализ рисков — неотъемлемая часть любого инвестиционного анализа.

Под инвестиционным риском понимают, когда наступают неблагоприятного события, в результате которого реализация проекта может оказаться под угрозой. Существует две группы рисков:

Риски, связанные с внешними факторами, которых также называют системными или систематическими.

Риски, связанные с внутренними факторами, которые отражают качество системы управления компанией и ее общее состояние. В отличие от системных рисков, внутренние поддаются снижению путем диверсификации. При анализе рисков могут применяться следующие методы:

- 1) Метод экспертных оценок, предполагающий оценку риска специалистом, исходя из опыта, знаний.
- 2) Статистический метод — измерение рисков с помощью определенных показателей, которые рассчитываются на основе прогнозных значений доходности объекта.

Методы анализа инвестиционных проектов

Специалисты-оценщики для решения задач в процессе инвестиционного анализа используют разные методы, которые позволяют получать количественную оценку инвестиционной деятельности с точки зрения отдельных аспектов как в статистике, так и в динамике:

1) Горизонтальный, или трендовый, метод. В процессе использования этого метода проводится расчет темпов роста инвестиционных показателей за определенный отрезок времени (месяца, квартала или года). Метод применяется для исследования показателей отчетного периода и сравнения с предшествующим периодом, для проведения аналитических изысканий по определению динамики роста в разное время.

2) Вертикальный, или структурный, метод. В процессе этого анализа рассчитывается удельный вес отдельных показателей инвестиционной деятельности компании. Обычно вертикальный метод используется для анализа инвестиций, инвестиционных ресурсов и денежных потоков по инвестиционной деятельности.

3) Сравнительный метод представляет собой рассмотрение и сопоставление одинаковых показателей в разных группах. Метод лежит в основе мониторинга текущей инвестиционной деятельности компании. В процессе анализа выявляется степень отклонения отчетных показателей от нормативных, выясняются причины этих отклонений и формируются рекомендации по корректировке.

4) Коэффициентный метод (анализ) базируется на расчете соотношения различных абсолютных показателей инвестиционной деятельности компании между собой. В процессе проведения анализа определяются относительные показатели инвестиционной деятельности и ее влияние на уровень финансового состояния компании.

5) Интегральный метод. Обычно используется при покупке ценных бумаг для формирования объема чистых вложений в объект инвестирования. С помощью этого метода можно за счет подбора «эффективного портфеля» снизить уровень риска и улучшить соотношение рассматриваемых показателей в пользу прибыльности. [3].

На рисунке 1 построена онтологическая модель классификаций инвестиционных проектов



Рисунок 1- Онтологическая модель классификация инвестиционных проектов

Также составляется база знаний по инвестиционным проектам.

☒ Существительное

☒ Прилагательное

☒ Глагол

☒ Определение

☒ Гипероним

☒ Гипоним

☒ Холоним

☒ Синоним

☒ Онтоним

☒ Омоним

☒ Мероним

Рисунок 2 - Окно приложения «Инвестиционный проект»

☒ Существительное
инвестиционный проект

☒ Прилагательное

☒ Глагол

☒ Определение
обоснование экономической целесообразности, объема и сроков осуществления прямых инвестиций в определенный объект, включающее проектно-сметную документацию, разработанную в соответствии с действующими стандартами.

☒ Гипероним

☒ Гипоним

☒ Холоним

☒ Синоним

☒ Онтоним

☒ Омоним

☒ Мероним

Рисунок 3 - Ответ системы на запрос пользователя «Инвестиционный проект»

При сравнении инвестиции и инновации необходимо определить общие положения, так как между ними существует тесная взаимосвязь, а также провести разграничения, которые, несомненно, существуют.

Инновационный процесс невозможен без инвестиций, а осуществление инвестиций без инноваций не имеет экономического смысла. Учитывая тесную взаимосвязь инвестиций и инноваций, часто для их оценки используют одни и те же показатели, что не является правильным.

Для инвестиционного проекта основным критерием выступает его финансовая эффективность с точки зрения привлекательности для инвестора. Для инновационного проекта важны не только финансовые результаты, но и его новизна, удовлетворяющая запросы потребителей и производителей.

Оценка эффективности

Таким образом, для анализа эффективности информационных систем управления необходимо использовать как показатели эффективности инвестиций, так и показатели эффективности инноваций.

Для оценки эффективности инноваций применяют более обширную систему показателей, чем для оценки эффективности инвестиций. Их можно объединить в три группы [2]:

1. показатели, характеризующие производственный эффект инноваций (прирост объема производства продукции, экономия материальных ресурсов, прирост добавленной стоимости, экономия от снижения себестоимости продукции, сокращение затрат труда на производство продукции, рост производительности труда, снижение материалоемкости);

2. показатели, характеризующие финансовую эффективность нововведений (прирост чистого дохода, прирост прибыли до выплаты процентов и налогов, прирост чистой прибыли после выплаты процентов, прирост рентабельности совокупного капитала, прирост рентабельности собственного капитала);

3. показатели инвестиционной эффективности инноваций (чистый приведенный эффект, индекс рентабельности, дисконтированный срок окупаемости). Используется такая же система показателей, что и для оценки эффективности реальных инвестиций.

Достижение конечного результата инновационного процесса связано с более высокими рисками по сравнению с осуществлением инвестиционного проекта, т.е. внедряя информационную систему управления организации следует учитывать высокую степень риска осуществляемого мероприятия. Методы оценки эффективности инноваций должны включать показатели, отражающие интегральный (общий) эффект от создания, производства и эксплуатации нововведений. Такой подход позволяет не только дать обобщающую (комплексную) оценку эффективности нововведения, но и определить вклад каждого из участников инвестиционной деятельности в эту эффективность.

Заключение

Учитывая сформулированные определения и установленные связи между инвестициями и инновациями можно сделать вывод, что для оценки эффективности инвестиций в информационные системы управления необходимо использовать системный подход, который предполагает использование системы показателей для оценки инвестиций и системы показателей для оценки инноваций[2].

Список использованных литератур:

1. <https://creativeconomy.ru/lib/4359>
2. Лесина Татьяна Викторовна. Методические принципы обоснования эффективности инвестиционных проектов при выборе информационной системы управления. «Креативная экономика» № 12 / 2010
3. <https://www.kp.ru/guide/investitsionnyi-analiz.html>

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ МАТРИЦ

Калиев П.У.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: p.kaliyev@gmail.com

Рассмотрим - диагональную симметрическую циркулянтную матрицу порядка $N \geq 2n+1$, ($n \geq 1$),

$$A_N = \text{circ}(b_n, b_{n+1}, \dots, b_{2n}, 0, \dots, b_0, \dots, b_{n-1}), \quad (1)$$

где

$$b_i = \sum_{s=0}^i (-1)^s C_{2n+2}^s (1+i-s)^{2n+1}, i = 0, 1, \dots, 2n. \quad (2)$$

Такие матрицы возникают при построении интерполяционных сплайнов дефекта 1 на равномерной сетке [1]. Для кубических сплайнов используются трехдиагональные циркулянтные матрицы при $n=1$, некоторые свойства таких матриц приводятся в работе [2]. В данной работе ставится задача нахождения элементов обратной матрицы для $(2n+1)$ - симметрической циркулянтной матрицы, заданной формулами (1), (2) для $n > 1$.

Пусть

$$A_N^{-1} = \text{circ}(a_1^N, a_2^N, \dots, a_N^N) \quad (3)$$

матрица, обратная циркулянтной матрице A_N . Необходимо получить явные выражения для элементов A_N^{-1} . Из уравнения $A_N^{-1} \cdot A_N = E$, где E - единичная матрица порядка N , имеем систему:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} a_i^N b_{n-i+1} + \sum_{i=1}^n a_{N-n+i}^N b_{i-1} &= 1, \\ \sum_{i=1}^{n+j} a_i^N b_{n-i+j} + \sum_{i=1}^{n-j+1} a_{N-n+i+j-1}^N b_{i-1} &= 1, j = 2, 3, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^{2n} a_{i+j-n-1}^N b_{2n+1-i} &= 0, j = n+1, n+2, \dots, N-n, \\ \sum_{i=1}^{j-N+n} a_i^N b_{j-N+n-i} + \sum_{i=1}^{N+n-j+1} a_{j-n+i-1}^N b_{i-1} &= 1, j = N-n+1, N-n+2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Сопоставим матрице A_N характеристический полином $P_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$,

который известен в литературе как полином Эйлера. Корни w_l , $l=1, 2, \dots, 2n$, этих полиномов вещественны, отрицательны и различны [3,4]. Пусть $|w_l| < 1$, $l=1, 2, \dots, n$ и $-1 < w_n < \dots < w_1 < 0$, тогда $w_l \cdot w_{2n+1-l} = 1$. С возрастанием n все эти корни сдвигаются влево по направлению к (-1) , $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = -1$, однако всегда $w_n \neq -1$, т.е. $P_n(-1) \neq 0$ [3]. Будем искать a_i^N в

виде $a_i^N = \sum_{l=1}^{2n} c_l w_l^{i-1}$, где c_l^N - коэффициенты, которые необходимо определить.

Подставив это выражение в (4) и учитывая, что $P_n(w_l) = 0$, получаем систему из $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными c_l^N :

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[\sum_{i=1}^{n+j+1} b_{n-i+j+1} w_l^{i-1} + \sum_{i=1}^{n-j} b_{i-1} w_l^{N-n+i+j-1} \right] &= 0, j = 1, 2, \dots, n-1, \\
\sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[\sum_{i=1}^{j-n+1} b_{j-n-i+1} w_l^{i-1} + \sum_{i=1}^{3n-j} b_{i-1} w_l^{N-3n+i+j-1} \right] &= 0, j = n, n+1, \dots, 2n-1, \\
\sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[\sum_{i=1}^{n+1} b_{n-i+1} w_l^{i-1} + \sum_{i=1}^n b_{i-1} w_l^{N-n+i-1} \right] &= 1,
\end{aligned}$$

Далее, учитывая, что $b_{i-1} = b_{2n+1-i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, преобразуем выражения в левой части первых $(n-1)$ уравнений системы к виду:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[\sum_{i=-n+j+1}^{n+j+1} b_{n-i+j+1} w_l^{i-1} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{n-j} b_{i-1} w_l^{N-n+i+j-1} - \sum_{i=1}^{n-j} b_{2n+1-i} w_l^{-n+i+j-1} \right] = \\
&= \sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[P_n(w_l) - (1 - w_l^N) \sum_{i=1}^{n-j} b_{i-1} w_l^{i-1} \right] w_l^{j-n}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[\sum_{i=1}^{j-n+1} b_{j-n-i+1} w_l^{i-1} + \sum_{i=1}^{2n+1} b_{i-1} w_l^{N-3n+j+i-1} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=3n-j+1}^{2n+1} b_{i-1} w_l^{N-3n+j+i-1} \right] = \sum_{l=1}^{2n} c_l^N \left[w_l^{N-3n+j} P_n(w_l) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{j-n+1} b_{j-n-i+1} w_l^{i-1} - \sum_{i=1}^{j-n+1} b_{3n+i-j-1} w_l^{N+i-1} \right] = \\
&= \sum_{l=1}^{2n} c_l^N (1 - w_l^N) \sum_{i=1}^{j-n} b_{j-n-i+1} w_l^{i-1}, \quad j = n, n+1, \dots, 2n.
\end{aligned}$$

Обозначив $a_l = c_l^N (1 - w_l^N)$, отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{2n} [a_l \sum_{i=1}^{n-j} b_{i-1} w_l^{i-1}] w_l^{j-n} &= 0, j = 1, 2, \dots, n-1, \\
\sum_{l=1}^{2n} [a_l \sum_{i=1}^{j-n+1} b_{j-n-i+1} w_l^{i-1}] &= 0, j = n, n+1, \dots, 2n-1, \\
\sum_{l=1}^{2n} [a_l \sum_{i=1}^{n+1} b_{n-i+1} w_l^{i-1}] &= 1,
\end{aligned}$$

которая, как не трудно видеть, эквивалентна системе

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{2n} a_l w_l^{j-n} &= 0, j = 1, 2, \dots, 2n-1, \\
\sum_{l=1}^{2n} a_l w_l^n &= 1. \quad (5)
\end{aligned}$$

Определитель полученной системы представляет собой определитель Вандермонда, а ее решение записывается в виде

$$a_l = \frac{w_l^{n-1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{2n} (w_l - w_j)}, l = 1, 2, \dots, 2n.$$

Таким образом,

$$c_l^N = a_l / (1 - w_l^N),$$

и поэтому

$$a_i^N = \sum_{l=1}^{2n} \frac{w_l^{n+i-2}}{(1 - w_l^N) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{2n} (w_l - w_j)}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Учитывая равенство $w_1 \cdot w_{2n+1} = 1$, нетрудно показать, что

$$a_i^N = \sum_{l=1}^{2n} c_l^N (w_l^{i-1} + w_l^{N-i+1}), i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

В дальнейшем будет удобно ввести величины a_i^N при $i = -n+2, -n+3, \dots, 0, N+1, N+2, \dots, N+n+1$, определяемые также формулой (6). Тогда из (5) и (7) получаем следующие свойства:

$$a_i^N = a_{N-i+2}^N, i = -n+2, -n+3, \dots, 0, \dots, N+n,$$

$$a_i^N = a_{i+N}^N, i = -n+2, -n+3, \dots, 0, \dots, n,$$

$$a_{n+1}^N - a_{n+1+N}^N = 1.$$

Полученные явные выражения $a_i^N, i=1, 2, \dots, N$ элементов обратной матрицы симметрической циркулянтной матрицы $(2n+1)$ порядка можно использовать для получения точных поточечных оценок погрешности приближения сплайнами нечетной степени на равномерной сетке.

Список литературы

1. FYFE D.J. Linear dependence relations connecting equal interval N-th degree splines and their derivatives. //J. Inst. Math. Appl. – 1971 – Vol. 7, №3. –Р.398-306.
2. Мирошниченко В.Л. Некоторые свойства трехдиагональных матриц и их применение к теории кубической сплайн-интерполяции. //Методы сплайн-функций. – Новосибирск.- 1975. –Вып.65: Вычислительные системы. –С. 29-49.
3. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. –248с.
4. Соболев С.Л. О корнях многочленов Эйлера. //ДАН СССР. – 1977. – Т. 235, №2. –С. 277-280.

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛОКОМОТИВА В РАМКАХ СИМУЛЯЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СРЕДЫ

Кантарбаев Б.А.

Магистрант 2-ого курса ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

bk.batyrbek@gmail.com

Аннотация

Моделирование и симуляции – методики, которые позволяют искусственно воспроизвести реальные ситуации для обеспечения максимального уровня безопасности и эффективности в процессах обучения. Посредством использования симуляторов возможно облег-

чить задачу прикладного обучения специалистов во многих областях, решить нерешенные проблемы, практические дилеммы и симитировать любого рода ситуации. Хорошо спонсированные проекты симуляционного моделирования имеют возможность обучить человека всему и довести его уровень владения теми или иными навыками до совершенства в любой узко- или широко направленной деятельности.

Данная статья содержит актуальность исследования и развития симуляторов простого вида на основе программы NetLogo.

Введение

Логистика, как один из самых важных аспектов любой страны, зависит от воздушных и наземных транспортных путей. Таким образом безопасность и возможность непрерывного использования этих путей является чрезвычайно важным.

Согласно Федеральному управлению железных дорог США в 2014 году произошли 11,896 железнодорожных аварий. Причинами этих аварий послужили сотни различных фактор, но самыми главными из них оказались механические поломки, наличие человеческой ошибки (ошибки машиниста), отвлеченные пешеходы, неисправность путей, и другие.

Так как даже самые развитые страны далеки от полной автоматизации механизмов и технологий, наличие человеческой ошибки еще надолго останется проблемой не только в транспортной сфере, но и во многих других видах человеческой деятельности. Тем не менее, вероятность возникновения данной ошибки возможно сократить в разы, используя различные методы. Наиболее действенным из всех методов являются моделирование и симуляция. Программное приложение NetLogo может быть использовано в качестве построения базовых версий симуляторов тепловозов и электровозов.

Программный приложение NetLogo, основанное на базе знаний, офлайн и онлайн вычислениях, ориентировано на обучение широкой аудитории, в том числе и детей, основам программирования и логики. NetLogo был разработан Юрием Валинским, профессором и директором центра компьютерного моделирования в “NorthwesternUniversity”.

В виду своей интерактивной природы и графическому интерфейсу NetLogo стал также популярен в среде симуляционного моделирования в различных сферах (экономика, биология, психология, физика, химия, системная динамика и т.д.). Широкому использованию данного программного языка во многих образовательных учреждениях, от учащихся средних учебных заведений до аспирантов, является свободный доступ и интерактивность.

Таким образом, NetLogo является идеальным инструментом для создания базовых симуляторов управления механическим транспортом типа тепловозов и локомотивов. Отдельным преимуществом использования данной программы является возможность взаимодействия общих закономерностей из традиционно отдельных областей в рамках симуляции: молекулярное взаимодействие частиц по законам физики; взаимодействия организмов в экосистемах, поведение рынков и экономики согласно современным правила ввода и вывода, взаимодействие частей механизмов согласно основам инженерии и многое другое.

Пользовательский интерфейс управления локомотивом

Первоначальная модель интерфейса, созданного в NetLogo будет основана на базовом представлении пульта управления машиниста локомотива и инструментов создания графической визуализации (рис. 1).

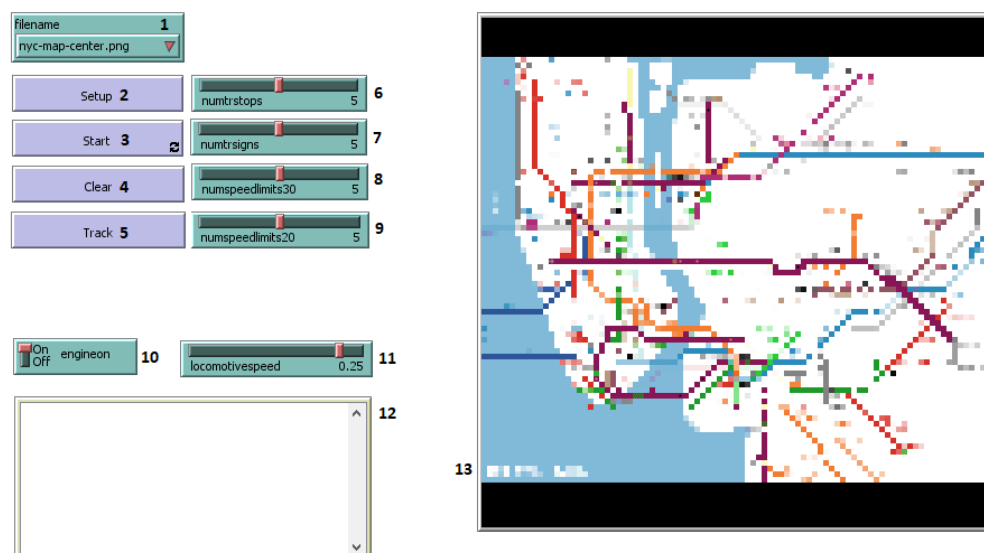


Рис.1 – базовый интерфейс программы управления локомотива и создания 2D визуализации в среде NetLogo

В данном симуляторе пользователь будет иметь выбор из следующих настроек:

- Выбор карты – пользователь сможет выбрать карту из тех, которые уже запрограммированы и имеются в папке с кодом (1).
- Визуальная настройка карты – пользователь сможет начать визуальное представление (2).
- Начать симуляцию – все аспекты симуляции начнут работу, внутренний часовой механизм симулятор начнет отсчет с нуля. (3).
- Отчистить визуальную настройку – остановка работы симулятора, отчистка экрана визуального представления (4).
- Проложение курса – локомотив оставит след на предыдущем месте пребывания, при этом будет выстроена линия (5).
- Ползунок выборки количества предполагаемых остановок локомотива – программа в случайном порядке расставит места для остановки на протяжении пути локомотива (6).
- Ползунок выборки количества предполагаемых сигналов светофора – программа в случайном порядке расставит места где будет стоять сигнал светофора на протяжении пути локомотива (7).
- Ползунок выборки количества предполагаемых ограничительных сигналов скорости локомотива – программа в случайном порядке расставит места для сигналов на протяжении пути локомотива (8-9).
- Панель запуска двигателя локомотива (10).
- Ползунок выбора скорости локомотива (11).
- Элемент экспертной системы (12) – данное окно будет выдавать сообщения-предупреждения и сообщения, нацеленные на обучение пользователя по заранее заданной программе.
- Окно графического представления (13) – программа автоматически переводит загруженные карты в изображения элементарного вида для облегчения внутренних вычислений и адаптации к запросам пользователя.

Дополнения, в зависимости от сложности модели, могут включать в себя элементы слежения за внутренними показателями (температура воды, напряжение и т.д.) и другим главным функциям локомотива.

Заключение

Наше общество быстрыми темпами развивает сферы деятельности с применением информационных технологий. В наше время практически невозможно найти какую-либо отрасль экономики или производства, где бы не применялась компьютерная техника. Следовательно, информационные технологии стремительными темпами вошла в жизнь современного общества и продолжает развиваться в геометрической прогрессии.

Данная проблема имеет место и в области обучения современных специалистов. Несомненно, разработка, апробация и внедрение полнофункционального тренажера-симулятора позволит контролировать уровень подготовки машинистов, управляющих локомотивами класса, обучать их и вести мониторинг их профессионального мастерства, и в конечном счете – намного повысить уровень безопасности на железных дорогах Казахстана. Тем не менее, в условиях современной экономики наша цель найти не только наиболее эффективные меры для обучения, но и наиболее бюджетные. NetLogo может помочь нам сделать начальные шаги в дальнейшем развитии бюджетных компьютерных технологий и методов моделирования окружающей среды

Перспективы исследования

Данное исследование не является первой и единственной работой в данной сфере, но будет иметь большие перспективы для развития. Сама идея создания multifunctionальной модели для симуляторов на базе различных систем тепловозов увлекательна и сложна, имеет научный интерес для специалистов железных дорог.

Создание такого рода симулятора позволит легче продвигать идею создания мало затратных симуляционных тренажеров и технологий моделирования внешней среды во многих родственных отраслях науки, информатики и инженерии.

Список использованных источников:

1. Uri Wilensky, «Modeling Nature's Emergent Patterns with Multi-agent Languages», Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, 2001. (<https://ccl.northwestern.edu/papers/MEE/>)
2. Seth Tisue, Uri Wilensky, «NetLogo: Design and implementation of a multi-agent modeling environment», 2004. (<https://ccl.northwestern.edu/papers/2013/netlogo-agent2004c.pdf>)

АКТИВИЗАЦИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Карлыбай Ж.Г., Рахимжанова С.К.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: zhazira-karlibay@mail.ru, srahimzhanova@mail.ru

Одной из важных задач обучения учащихся начальных классов и среднего звена является воспитание логической грамотности их для дальнейшего обучения в школе, самообразования и для успешной общественно полезной практической деятельности в повседневной жизни. Логическая грамотность учащихся, вообще говоря, формируется в процессе обучения всех школьных предметов, но именно в математике логические формы и отношения проявляются в наиболее чистом виде. Логика - это основной инструмент математики, с помощью которого упорядочиваются, приводятся в систему имеющиеся математические знания и получаются новые. Непосредственное решение логических задач является инструментом развития логического мышления учащихся.[1].

Логическими задачами называются специально составленные задания, рассчитанные на учащихся с разным логическим мышлением, итог которого будет зависеть от правильно выбранного протекания мыслительного процесса.

Рассмотрим проблемы активизации познавательной деятельности учащихся 5-6 классов в процессе решения логических задач. Если в начальных классах логические задачи решаются в основном в игровой форме, то в 5-6 классах уже рассматриваются различные типы и методы решения таких задач.

Важность возрастных особенностей учащихся 5-6 классов заключается в том, что они находятся в переходном возрасте, что отражается на всех формах их развития: анатомо-физиологической, интеллектуальной и нравственной. В этом возрасте происходит усиленный рост самосознания, что при правильной организации их воспитания и обучения позволяет существенно поднять интерес к обучению в целом и математике в частности.

Поскольку количество часов математики в современной школе ограничено (3-5 часов), то для решений логических задач, как правило, используются дополнительные внеклассные занятия: математические кружки, факультативы, занятия по подготовке к олимпиадам и пр. [3].

Согласно возрастным особенностям учащиеся 5-6 классов могут решать следующие типы задач:

1. Истинностные задачи - это задачи, в которых требуется установить истинность и ложность высказываний;
2. Задачи, решаемые с конца - задачи в виде головоломок на задуманное число;
3. Задачи на переливание – это задачи, в которых с помощью сосудов нужно отмерить определенное количество литров жидкости;
4. Задачи типа «Кто есть кто?» - задачи, решаемые по цепочке отношения друг с другом, следуя этой цепочке отношений, приходим к правильному ответу;
5. Задачи на пересечение и объединение множеств - это тип задач, в которых требуется найти некоторое пересечение множеств или их объединение, соблюдая условия задачи;
6. Математические ребусы – это математическая головоломка, в которой все цифры заменены буквами, знаками препинания, звездочками и т.д.

Для решения данных типов логических задач можно применить следующие методы.

- **Метод рассуждений** - это самый примитивный способ. Этим способом решаются самые простые логические задачи.

Например, задача 1.

Алтынай, Айша и Жансая – подруги. Они изучают иностранные языки: английский, немецкий и китайский. На вопрос, какой язык изучает каждая из них? - одна ответила: «Алтынай изучает английский, Айша не изучает английский, а Жансая не изучает китайский». Выяснилось, что в этом ответе верное утверждение только одно, а два других ложны. Какой язык изучает каждая из них?

Решение.

Имеется три утверждения:

- Алтынай изучает английский;
- Айша не изучает английский;
- Жансая не изучает китайский.

Если верно первое утверждение, то верно и второе, так как девочки изучают разные языки. Это противоречит условию задачи, поэтому первое утверждение ложно.

Если верно второе утверждение, то первое и третье должны быть ложны. При этом получается, что никто не изучает китайский. Это противоречит условию, поэтому второе утверждение тоже ложно.

Остается считать верным третье утверждение, а первое и второе — ложными. Следовательно, Алтынай не изучает английский, английский изучает Айша.

Ответ: Айша изучает английский, Жансая - немецкий, а Алтынай – китайский.

- **Метод таблиц** – это метод позволяющий наглядно представить условие задачи и ее ответ. [3].

Например, задача 2.

Трем братьям Болату, Арману и Санжару купили игрушки: машинки и мячи красного, зеленого и синего цветов. У Болату цвета машинки и мяча совпадают. У Армана ни машинка, ни мяч не красного цвета. У Санжару машинка зеленого цвета, а мяч - другого цвета. Какого цвета машинки и мячи у каждого брата?

Решение:

Составим таблицу, в столбцах которой отметим возможные цвета машинок и мячей братьев (буквами К, З и С обозначены красный, зеленый и синий цвета). Будем ставить знак «+» при совпадении верных ответов и знак «-» при несовпадении.

Заполним таблицу, используя условия задачи.

Таблица 1. Решение задачи 2

	Машинка	Машинка	Машинка	Мяч	Мяч	Мяч
Болат	+	-	-	+	-	-
Арман	-	-	+	-	+	-
Санжар	-	+	-	-	-	+
	К	З	С	К	З	С

Из полученной таблицы можно увидеть, что: у Болату машинка красная, мяч красный; у Армана машинка синяя, а мяч зеленый; у Санжару машинка зеленая, а мяч синий.

- **Метод графов** – это метод изображений при помощи линий, точек и других символов. [4].

Например, задача 3.

Одна дружная семья, где были мать, отец и сын, любили все делать вместе. Но фильмы любили разные: «Гарри Поттер», «Один Дома», «Нарния». Нужно определить, какой фильм любит каждый из них, если мать, отец и любитель фильма «Один дома» пьют яблочный сок по утрам, а отец и любитель фильма «Нарния» вместе готовят ужин?

Рассмотрим множество людей: мать, отец, сын и множество фильмов «Гарри Поттер», «Один Дома», «Нарния». Обозначим элементы этих двух множеств точками.

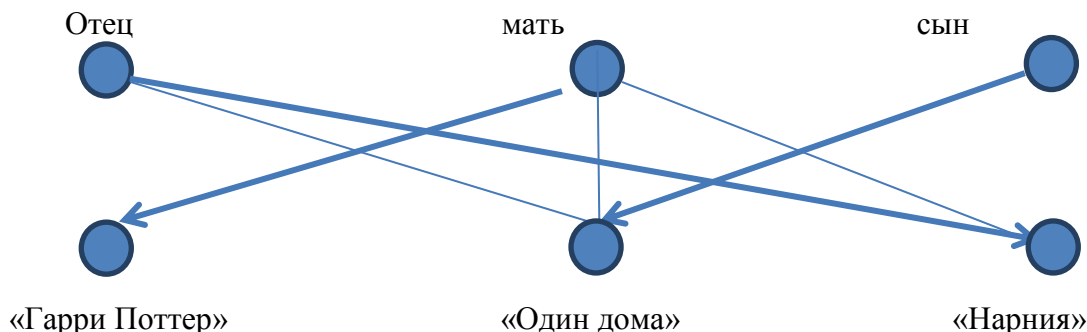
Если точке из одного множества соответствует точка другого множества, будем соединять эти точки толстой стрелкой, если не соответствует – обычной линией.

Заметим, что по условию задачи у человека только один любимый фильм. Из условия «мать, отец и любитель фильма «Один дома» пьют яблочный сок по утрам» следует, что сын является любителем фильма «Один дома», из условия «отец и любитель фильма «Нарния» вместе готовят ужин» означает, что любителем фильма «Нарния» является мать.

Граф будет выглядеть следующим образом:

рис. 1

Граф решения задачи 3



- **Метод кругов Эйлера-Венна** – это геометрическая схема, которая помогает находить и/или делать более наглядными логические связи между явлениями и понятиями. А также помогает изобразить отношения между каким-либо множеством и его частью. [4].

Например, задача 4.

Шестиклассники заполняли анкету с вопросами об их любимых мультфильмах. Оказалось, что большинству из них нравятся «Ақсақ құлан», «Аңшы» и «Алдар көсе». В классе 38 учеников. «Ақсақ құлан» нравится 21 ученику. Причем трем среди них нравятся еще и «Аңшы», шестерым - «Алдар көсе», а один ребенок одинаково любит все три мультфильма. У «Аңшы» 13 фанатов, пятеро из которых назвали в анкете два мультфильма. Надо определить, скольким же шестиклассникам нравится «Алдар көсе».

Решение:

Так как по условиям задачи у нас даны три множества, чертим три круга. А так как по ответам ребят выходит, что множества пересекаются друг с другом, чертеж будет выглядеть так.

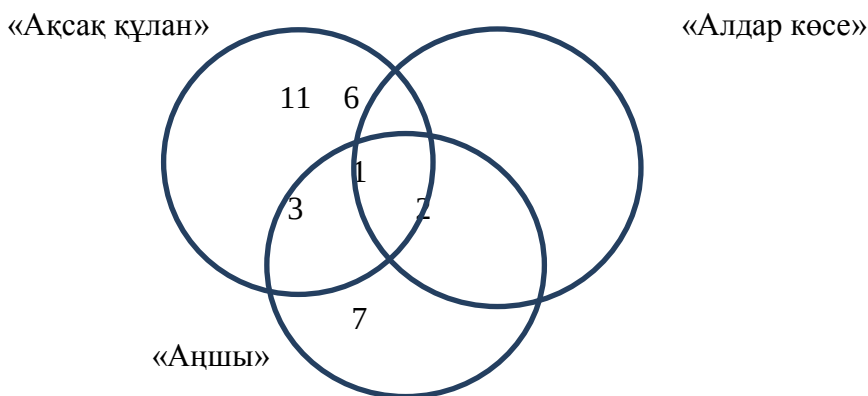
Мы помним, что по условиям задачи среди любителей мультфильма «Аңшы» пятеро ребят выбрали два мультфильма сразу.

$$21 - 3 - 6 - 1 = 11 - \text{учеников смотрят только «Ақсақ құлан»}$$

$$13 - 3 - 1 - 2 = 7 - \text{учеников смотрят только «Аңшы»}$$

рис. 2

Решение задачи 4



По полученному пересечению кругов видно, что 8 учеников являются фанатами фильма «Алдар көсе».

Проиллюстрируем на примере открытого факультативного урока реализацию методической задачи развития логического мышления учащихся 5-6 классов. Тип урока: закрепление пройденного материала.

В качестве интеллектуальной разминки в начале занятия предлагаются короткие логические задачи для тренировки ума, памяти и внимания.

Например, для тренировки ума:

- Вы опередили бегуна, который находился на третьей позиции. Какое место теперь Вы занимаете? (3 место).

- Один оборот вокруг Земли спутник делает за 100 минут, а другой - за час и 40 минут. Как это может быть? (100 минут = 1 ч 40 минут).

- Пилот выпрыгнул без парашюта из самолета и остался невредимым. Как ему удалось остаться живым и невредимым? (Самолет не был в полете, он стоял на взлетной полосе).

Для тренировки памяти учащимся на мультимедийной доске предлагается карточка с изображениями животных, которые они рассматривают и запоминают в течение 1 минуты. Затем им задаются вопросы:

- Какой порядок животных был изображен на рисунке в первом ряду?;
- Какое животное изображено между коровой и крокодилом?;
- Сколько животных начинающиеся на букву «к»?;
- Сколько домашних животных изображено на картинке?;
- Сколько птиц изображено на картинке?;
- Запиши названия всех животных в алфавитном порядке.

Для тренировки внимания используем таблицу Шульте – очень эффективное упражнение для развития внимания и концентрации. В этом задании нужно в предложенной таблице на скорость находить числа в порядке возрастания.

3	23	8	15	17
19	14	25	22	2
5	21	10	12	9
24	13	1	18	16
11	6	7	20	4

Приведенные тренировочные задания позволяют настроить учеников на решения более сложных и объемных логических задач, которые будут предложены на следующем шаге урока. Разделим класс на три равносильные группы и предложим каждой группе по одной логической задаче. Предложенные задачи могут быть следующего содержания:

Задача 1

Малика, Лаззат, Жанар и Кымбат умеют играть на разных музыкальных инструментах(пианино, виолончели, гитаре, скрипке), но каждая только на одном музыкальном инструменте. Девушки также знают иностранные языки (английский, французский, немецкий и испанский), но каждая только один язык. Известно:

1. Девушка, которая знает испанский, играет на гитаре.
2. Лаззат не играет ни на виолончели, ни на скрипке и не знает английского языка.
3. Малика не играет ни на виолончели, ни на скрипке и не знает ни английского, ни немецкого.
4. Девушка, которая говорит на немецком языке, не играет на виолончели.
5. Жанар знает французский язык, но не играет на скрипке.

Кто на каком музыкальном инструменте играет, и какой иностранный язык знает?

Задача 2

3 брата: Олжас, Арман и Султан построили 3 дома. Один построил соломенный, другой деревянный, а третий кирпичный. Все три брата выращивали любимые цветы возле своих домов: розы, ромашки и тюльпаны. Известно, что Олжас живет не в соломенном доме; а Арман – не в деревянном; возле соломенного дома растут не розы, а тот, у кого деревянный дом, выращивает ромашки. У Армана аллергия на тюльпаны. Узнайте, кто в каком доме живет и какие цветы возле дома выращивает.

Задача 3

Шестиклассники заполняли анкету с вопросами об их любимых мультфильмах. Оказалось, что большинству из них нравятся «Аксақ құлан», «Аңшы» и «Алдар көсе». В классе 38 учеников. нравится 21 ученику. Причем трем среди них нравятся еще и «Аңшы», шестерым - «Алдар көсе», а один ребенок одинаково любит все три мультфильма. У «Аңшы» 13 фанатов, пятеро из которых назвали в анкете два мультфильма. Надо определить, скольким же шестиклассникам нравится «Алдар көсе».

Перед учениками ставятся следующие задачи:

- определить тип логической задачи;
- выбрать метод решения;
- правильно применить метод;
- сделать вывод по итогам решения задачи;
- презентовать решение задачи.

Для закрепления пройденной темы ученика выдаются задания разной сложности, которые будут оценены впоследствии соответственно уровню сложности.

Таким образом построенное занятие решает следующие методические задачи:

- развивать логическое мышление;
- обучать решению логических задач;
- развивать память, внимание, смекалку, быстроту решений;
- воспитывать культуру общения, прививать интерес к математике

Большую помощь в решении обсуждаемой методической проблемы могут оказать информационно-коммуникационные методы и технологии (ИКТ) в обучении, которые дают возможность оживить урок, то есть вызвать интерес к предмету.

Так, например, для иллюстрации решения задач методом таблиц, графов, кругов Эйлера-Венна активно используются ИКТ (интерактивная доска, стационарный компьютер, интернет и тд.), что позволит повысить качество обучения, развить внимание, позволит формировать культуру умственного труда, творческую активность, дисциплинированность школьников, и позволит экономить время на занятии.

Список использованных источников

1. Ведерникова, Т.Н., Иванов, О.А. Интеллектуальное развитие школьников на уроках математики. // Математика в школе. - 2002. - № 3.
2. Задачи для внеклассной работы по математике в 5-6 классах: Пособие для учителей /Сост. В. Ю. Сафонова; Под ред. Д.Б. Фукса, А.Л. Гавронского. – М.: МИРОС, 1983.
3. Шейнина, О.С., Соловьёва Г.М. Математика. Занятия школьного кружка. 5-6 кл. – М.: НЦ ЭНАС, 2003.
4. Засенок, В.П. Подумай и ответь (Логические задачи). - М., 1996.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КАПЛИ: ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОДА НА ОСНОВЕ МЕТОДА VOLUME-OF-FLUID

Киреев В.^{1,2}, Шалабаева Б.³, Низамова А.²

¹ *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*

² *Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*

³ *Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*

E-mail: kireev@anrb.ru

Введение

Теоретическое и экспериментальное изучение особенностей поведения отдельных капель одной вязкой жидкости в другой под действием различных физических полей (тепловых, акустических, электромагнитных) имеет важное значение при решении технологических задач в разных отраслях промышленности. Например, изучая процесс взаимодействия водяной капли, покрытой асфальтеновой («бронирующей») оболочкой, в нефти с электромагнитным полем сверхвысокой частоты можно определить такие закономерности, которые позволят разработать более эффективные, чем применяющиеся в настоящее время, технологии разделения водонефтяной эмульсии (а также других двухфазных сред) в аппаратах нефтехимических производств [1]. В общем случае форма капли является несферической и формируется в результате сложного взаимодействия целой совокупности факторов, таких как вязкости жидкостей, силы межфазного натяжения, сила тяжести, акустические и электромагнитные поля и др. Поэтому для адекватного описания нелинейной динамики одиночной капли необходимо использование современных методов численного моделирования, позволяющих определять положение границы раздела между фазами.

Наибольшее распространение в настоящее время получили три метода для отслеживания границ раздела между фазами: метод отслеживания фронта (FrontTrackingMethod, FT) [2], LevelSetMethod (LS) [3] и VolumeofFluid (VOF) [4].

Целями настоящей работы являются разработка и тестирование оригинального программного кода, основанного на алгоритме метода Volume Of Fluid, который в дальнейшем будет использоваться при численном моделировании динамики капли для отслеживания ее границы.

Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную область, в которой происходит течение двух различных несмешивающихся жидкостей (Рис. 1, а). Положение границ раздела между жидкостями будет определяться неявным уравнением

$$S(x, y, t) = 0. \quad (1)$$

Изменение положения границы раздела со временем в процессе течения описывается уравнением переноса

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u_x \frac{\partial S}{\partial x} + u_y \frac{\partial S}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

где $\vec{u} = (u_x, u_y)$ – скорость течения жидкостей.

В методе VolumeofFluid уравнение (2) не используется в явном виде для определения динамики границы раздела, а перемещение границы осуществляется с помощью специального алгоритма. Для этого вместо функции $S(x, y, t)$ вводится специальная сеточная маркерная функция C_{ij} , которая определяется как объемная доля одной из жидкостей в каждой ячейке вычислительной сетки (Рис. 1, б):

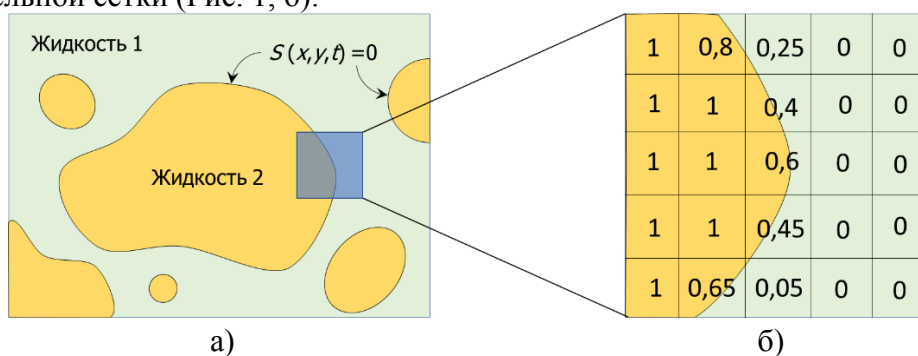


Рис. 1. К постановке задачи: а) граница раздела между жидкостями; б) значения маркерной функции в ячейках сетки

- $C_{ij} = 0$, если ячейка (i, j) полностью заполнена жидкостью «1»;
- $C_{ij} = 1$, если ячейка (i, j) полностью заполнена жидкостью «2»;
- $0 < C_{ij} < 1$, если через ячейку (i, j) проходит граница раздела.

Поскольку от точного определения положения границы раздела между жидкостями во многом зависят результаты численного моделирования многофазных течений, в настоящей работе приводятся результаты некоторых тестов для проверки работоспособности созданного программного кода и оценки точности представления границы раздела фаз.

Результаты численного моделирования

В первой серии тестов первоначально круглая и квадратная области, занятые жидкостью «2», перемещались поступательно под действием постоянного поля скоростей. В одном случае скорость была направлена вдоль координатной оси Y ($\vec{u} = (0, 1)$), а в другом случае скорость была направлена по диагонали расчетной области ($\vec{u} = (1, 1)$). При численном моделировании выполнялось 1000 шагов по времени. При этом жидкость перемещалась на расстояние примерно в пять раз превышающее исходный размер области, занятой жидкостью «2». Размер ячейки был выбран таким образом, чтобы на характерной длине области жидко-

сти «2» помещалось около 20 ячеек. На Рис. 2 и 3 представлены формы границы раздела, полученные в результате численных расчетов по предложенному авторами алгоритму, а также для сравнения приведены результаты аналогичных тестов из работы [5].

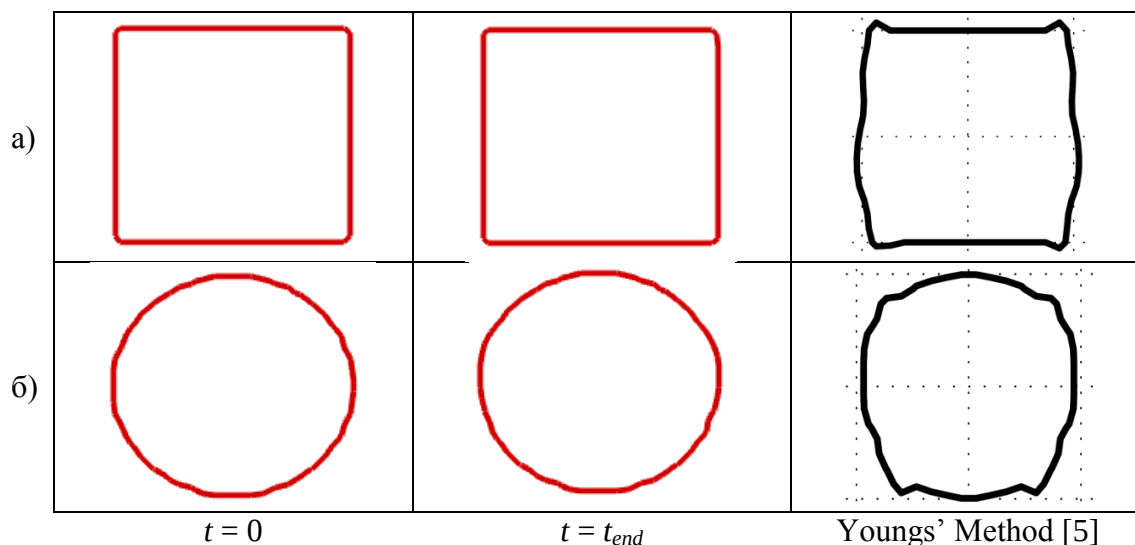


Рис. 2. Поступательное движение квадратной (а) и круглой (б) областей вдоль оси Y

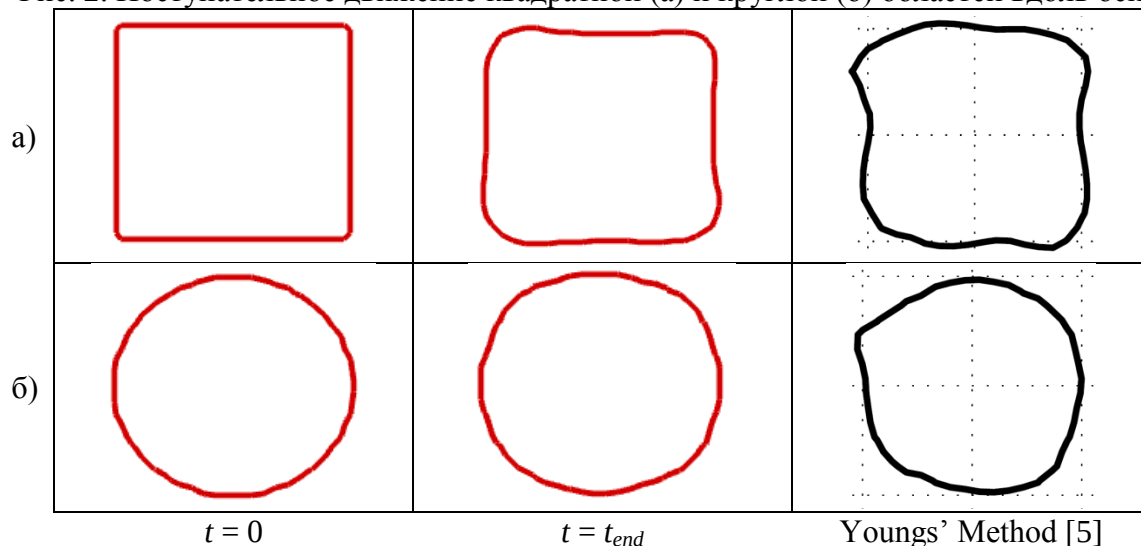


Рис. 3. Поступательное движение квадратной (а) и круглой (б) областей по диагонали

Во второй, более сложной, серии тестов круглая и квадратная области жидкости, занятые жидкостью «2», помещались в круговое поле скорости и вращались как твердое тело. Центр вращения находился от геометрического центра жидкой области на расстоянии примерно в два раза больше ее характерного размера. Выполнялось 600 шагов по времени, за который делался полный оборот и область возвращалась в исходное положение. Размер ячейки был выбран таким образом, чтобы на характерной длине области жидкости «2» помещалось около 20 ячеек. На Рис. 4 показаны результаты расчетов и данные из работы [5].

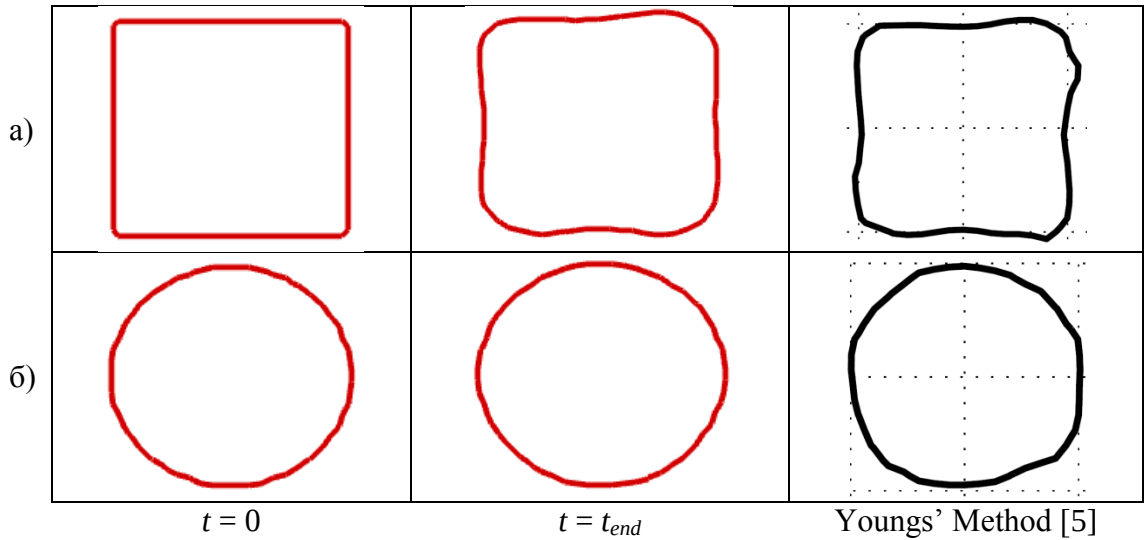
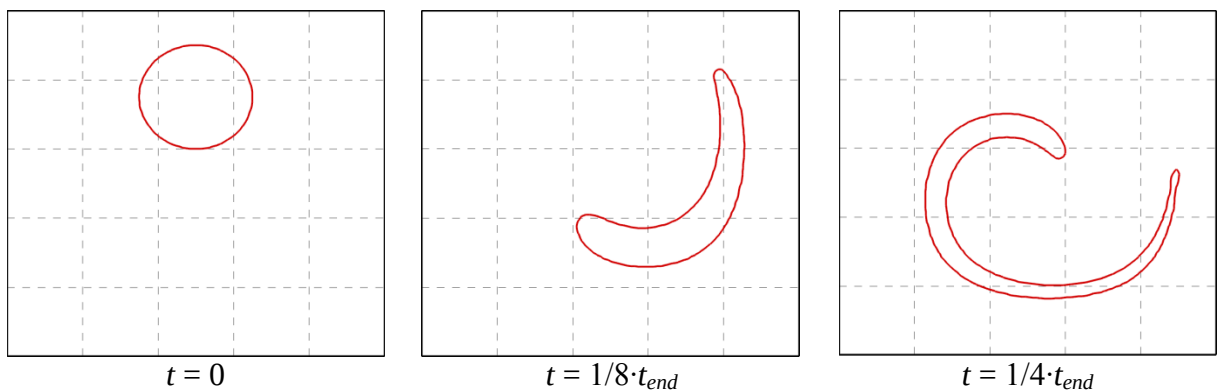


Рис. 4. Вращательное движение квадратной (а) и круглой (б) областей как твердого тела

Если в первых двух сериях тестов топология области не изменялась, то в третьей серии тестов, которые предложены в работе [6], использовалось соленоидальное поле скорости, в котором первоначально круговая форма капли вытягивается и закручивается в спираль вокруг центра вращения. Поле скорости в данном случае имеет вид:

$$\vec{u} = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right), \quad \Phi = \frac{1}{\pi} \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) \quad (3)$$

Численное моделирование продолжалось до достижения времени $t_{\max}$. В момент времени $t_{\max}/2$ направление вращения изменяется на противоположное и капля возвращается в исходное положение. В случае применения идеального метода отслеживания границы начальная и конечная форма капли совпали бы. На Рис. 5 показаны полученные в результате численного моделирования положения границы раздела в последовательные моменты времени. На графике, соответствующем моменту времени $t_{\max}$, тонкой пунктирной линией показана граница капли в начальный момент времени. Видно, что в силу погрешностей численного метода начальная и конечная формы капли не совпадают, однако достаточно близки друг к другу.



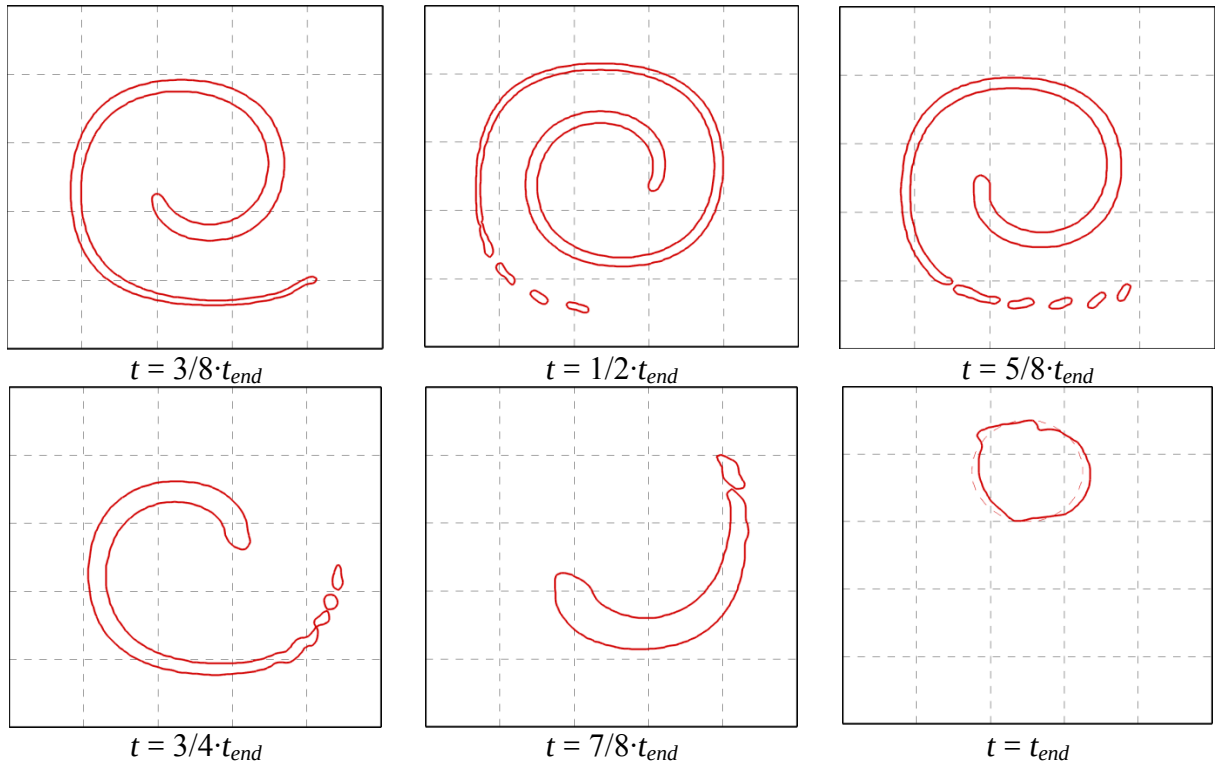


Рис. 5. Изменение формы жидкой капли в соленоидальном поле скорости

Анализ результатов, представленных на Рис. 2-5, позволяет сделать вывод, что разработанный авторами программный код позволяет адекватно моделировать положение границы раздела между фазами и дает лучшие результаты по сравнению с другими методами отслеживания границ (например, Youngs' method).

Для количественной оценки качества предложенного алгоритма можно оценить насколько хорошо выполняется закон сохранения массы. Это можно сделать с помощью следующей величины:

$$VOF_{error} = \left(\left(\sum_{i,j} C_{ij} \right)_{t=t_{max}} - \left(\sum_{i,j} C_{ij} \right)_{t=0} \right) / \left(\sum_{i,j} C_{ij} \right)_{t=0}, \quad (4)$$

где суммирование происходит по всем ячейкам вычислительной сетки.

Максимальное значение VOF_{error} наблюдается для теста с соленоидальным полем скорости и составляет $1,7 \cdot 10^{-3}$. Для остальных тестов VOF_{error} принимает меньшие значения, т.е. масса жидкости сохраняется с достаточной степенью точности.

Заключение

Результаты численного моделирования показали, что во всех тестах первоначальная форма сохраняется с достаточной степенью точностью – в первой и второй сериях экспериментов отклонение порядка 1%, а в третьей серии отклонение не превышает 5%. Таким образом показано, что созданный на основе метода Volume of Fluid программный код адекватно моделирует положение границы раздела фаз.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05134098).

Список используемых источников

1. Ковалева Л.А., Миннигалимов Р.З., Зиннатуллин Р.Р. Исследование устойчивости водонефтяной эмульсии в электромагнитном поле в зависимости от её диэлектрических свойств // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2010, № 2. – С.59-62.
2. Unverdi S.O., Tryggvason G. A front tracking method for viscous incompressible multi-fluid flows // Journal of Computational Physics. – 1992. – Vol. 100, Is. 1. – pp. 25–37
3. Osher S., Sethian J.A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations // Journal of Computational Physics. – 1988. – Vol. 79, Is. 1 – pp. 12– 49
4. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // Journal of Computational Physics. – 1981. – Vol. 39, Is. 1 – pp. 201 – 225
5. Young D.L. An interface tracking method for a 3D Eulerian hydrodynamics code: Technical report AWRE/44/92/35, Atomic Weapons Research Establishment. – 1987
6. Rider W.J., Kothe D.B. Reconstructing volume tracking // Journal of Computational Physics. – 1998. – Vol. 141, Is. 2 – pp. 112 – 152

ҚИЫНДЫҒЫ ЖОҒАРЫ ЕСЕПТЕР

Мусайбеков Р. К., Алип А.

Ш.Уәлиханов атындағы Көкшетау мемлекеттік университеті, Көкшетау қ-сы

E-mail: rashid1956@bk.ru

Қиындығы жоғары есептер – адамның жеке ойлау қабілетін жаттықтыратын және сынау қажеттілігін қамтамасыз ететін өзіндік «ой гимнастикасы». Математика сабағында қиындығы жоғары есептерді шығару барысында оқушының ойлау қабілеті дамып, пәнге деген қызығушылығы артады. Қазіргі заман математика ғылымының өте кең, жан - жақты тараған кезеңі. Ал талапқа сай математикалық білім берудің басты шарты математикалық мәдениеттің деңгейін көтеру болып табылады. Математикадан күрделі есептерді шешу оқушылардың ойын оятып, ойлау, есте сақтау қабілеттерін дамытуда, батыл қимылдар жасауға, шығармашылық ізденіске тәрбиелейді. Оқушылардың математикалық сауаттылығын арттыру – олардың алған білімінің тиянақты болуын қамтамасыз ету. Сондықтан, оқушылардың математикаға дайындығын жан - жақты жетілдіру – қазіргі аса маңызды міндеттердің бірі. Оқушылардың логикалық ой - өрісін арттыруда, оларды математикаға қызықтыруда олимпиадалық есептерді шығару сабағын өткізудің маңызы зор.

Математикалық есеп – оқушылардың ұғымдарды, теорияны және математика әдістерін меңгерудің тиімді де, айырбасталмайтын құралы. Оқушылардың ойлау қабілеттерін дамытуда, оларды тәрбиелеуде, біліктіліктері мен дағдыларының қалыптасуына математиканың практикамен байланысын көрсетуде есептің маңызы зор. Есеп шығару - ой жұмысы. Ой жұмысы арқылы оқушылар дербес ойлауға, қорытынды шығарып, математикалық ақиқатты көре білуге, дәлдікке үйренеді.

Енді кейбір тақырыптардан қиындығы жоғары есептерді келтіріп, шешімдерін көрсетейік:

1. Мәтінді есептер [1]

а) Үш трактор бригадасы бірігіп белгіленген жерді 4 күнде жыртады. Бірінші және екінші бригадалары осы жерді 6 күнде, ал бірінші мен үшінші бригадалар бірігіп осы жерді 8 күнде жыртады. Екінші бригада үшінші бригадаға қарағанда жерді бір күнде неше есе артық жыртады?

Шешуі:

Көптеген есептерде екі элемент туралы әңгіме жүргізілсе, осы есепте үш элемент бар (үш трактор бригадасы). Біздің ойымызша, есептің күрделілігі осында.

x, y, z – үш бригаданың әрқайсысының жырту жылдамдықтары болсын. Енді есептің шартын қанағаттандыруға тырысайық. S деп жердің ауданын белгілейік. Осы есепте назарға алынатын жағдай осындай:

1. Үш бригада белгіленген жерді неше күнде жыртады?
2. Бірінші және екінші бригадалар белгіленген жерді неше күнде жыртады?
3. Бірінші және үшінші бригадалар белгілі жерді неше күнде жыртады?

4. 1-3 жағдай үшін теңдеулерді қалай құрастырамыз?

$$\begin{cases} 4(x + y + z) = S & (1) \\ 6(x + y) = S & (2) \\ 8(x + z) = S & (3) \end{cases}$$

Екінші теңдеуден бірінші теңдеуді, үшінші теңдеуден бірінші теңдеуді азайтқанда келесі теңдеулер жүйесі шығады.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 0 & : 2 & (1) \\ 4x - 4y + 4z = 0 & : 4 & (2) \end{cases}$$

бірінші теңдеуден екінші теңдеуді азайтқанда,

$$2y - 3z = 0 \Rightarrow 2y = 3z,$$

$$\frac{2y}{3z} = 1, \frac{y}{z} = \frac{3}{2}, \frac{y}{z} = 1,5$$

Жауабы: 1,5

ә) Сәйкесінше 10, 30 және 5 л тұз қышқылының ерітіндісі бар үш ыдыс берілген. Екінші ыдыста бірінші ыдысқа қарағанда қышқыл 10 % артық, ал үшінші ыдыста 40 % қышқыл бар. Екінші ыдыстан ерітіндінің жартысын біріншіге, ал қалған жартысын үшінші ыдысқа құйды. Осыдан кейін бірінші мен үшінші ыдыстарда қышқылдың пайыздық мөлшері бірдей болды. Бірінші ерітіндідегі қышқылдың пайыздық мөлшері қандай?

Шешуі:

P% -бірінші ерітіндідегі қышқылдың пайыздық мөлшері болса, (P+10)% - екінші ерітіндідегі қышқылдың пайыздық мөлшері.

Бірінші ыдысқа құйғаннан кейін, осы ыдыста 25 л ерітінді, $\left(\frac{P}{100} \cdot 10 + \frac{P+1}{100} \cdot 15 \right)$

л қышқыл болады, ал үшінші ыдыста $\left(2 + \frac{P+1}{100} \cdot 15 \right)$ л қышқылы бар 20 л ерітінді болады.

Есептің шартынан біз шыққан ерітінділердің концентрациялары бірдей екенін көріп,

келесі теңдеуді шығарамыз: $\frac{\frac{P}{100} \cdot 10 + \frac{P+1}{100} \cdot 15}{25} = \frac{2 + \frac{P+1}{100} \cdot 15}{20}$ осы теңдеуден P=46%

шығады.

Жауабы: 46%

б) Алтын мен күмістің балқымалары бар. Бірінші балқымада металдар 1:2 қатынасында болса, екіншісінде 2:3 қатынасында болады. Алтын мен күміс 7:12 қатынасында болатындай 19 г балқымада бірінші балқыманың неше граммын алуымыз керек? [2]

Шешуі:

Алтын барлық балқымада қандай қатынаста болады деген сұраққа, оқушылар $\frac{1}{2}$ қатынасын айтуы мүмкін, дұрыс жауабы, металдардың барлық бөлігі $3(1+2)$, сондықтан алтын барлық балқыманың $\frac{1}{3}$ бөлігін құраса, екінші балқыманың $\frac{2}{5}$ бөлігін құрайды.

Мұнда теңдеу немесе теңдеулер жүйесін құрастыру керек пе?

Мұнда теңдеулер жүйесін құрастырамыз, себебі екі балқыманың да массаларын білмейміз.

X_2 - бірінші балқыманың массасы, Y_2 - екінші балқыманың массасы. Енді бірінші теңдеуді құру жеңілге түседі: $x + y = 19$

Екінші теңдеуді құру үшін келесі тұжырым жасайық:

Алтын бірінші балқыманың $\frac{1}{3}$ бөлігін құрайды, осыдан оның массасы $\frac{1}{3}x$, екінші балқымада алтын $\frac{2}{5}$ бөлігін құрайды, массасы $\frac{2}{5}y$ болады. Жаңа балқыманың алтын $\frac{7}{19}$ бөлігін құраса, массасы $\frac{7}{19} \cdot 19 = 7$ болады. Екінші теңдеу $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = 7$

$$\text{Теңдеулер жүйесі осындай болады: } \begin{cases} x + y = 19 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = 7 \end{cases}, \begin{cases} y = 19 - x \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}(19 - x) = 7 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{38}{5} - \frac{2}{5}x = 7$$

$$-\frac{1}{15}x = 7 - 7\frac{3}{5}$$

$$-\frac{1}{15}x = -\frac{3}{5} \quad \begin{cases} x + y = 19 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = 7 \end{cases}$$

$$x = -\frac{3}{5} : \left(-\frac{1}{15}\right)$$

$$x = 9$$

Жауабы: бірінші балқыманы 9 г деп алуымыз керек.

2. Тригонометриялық теңдеулер [3].

Теңдеуді шешіңдер:

$$\cos\left(\frac{8\pi}{3} \arctg(2^{\sin x})\right) = 1$$

Шешуі:

$$\cos\left(\frac{8\pi}{3} \arctg(2^{\sin x})\right) = 1$$

$$\frac{8\pi}{3} \arctg(2^{\sin x}) = 2\pi n, n \in Z$$

$$\frac{4}{3} \arctg(2^{\sin x}) = n, n \in Z$$

$$\arctg(2^{\frac{\sin x}{4}}) = \frac{3}{4}n, n \in Z$$

$$2^{\frac{\sin x}{4}} = \tg\left(\frac{3}{4}n\right), n \in Z$$

$$\log_2(2^{\frac{\sin x}{4}}) = \log_2\left(\tg\left(\frac{3}{4}n\right)\right), n \in Z$$

$$\sin x = \log_2\left(\tg\left(\frac{3}{4}n\right)\right), n \in Z$$

$$x = (-1)^k \arcsin \log_2\left(\tg\left(\frac{3}{4}n\right)\right) + \pi k, k \in Z$$

$$\text{Жауабы: } (-1)^k \arcsin \log_2\left(\tg\left(\frac{3}{4}n\right)\right) + \pi k, k \in Z$$

Оқушылардың тұлғалық қасиеттерін есте ұстау, әртүрлі типті тапсырмаларды қолданып, олардың әрбіреуіндегі танымдық әрекеттерді саралау болып табылады.

Оқыту үрдісі кезінде мұғалімнің оқушылардың танымдық қызығушылықтарын оятуы, жақсартуы және дамытуы оның өз пәнінің мазмұнын бай, терең, қызықты етіп және оқушылардың танымдық әрекеттерінің тәсілдерін әртүрлі, шығармашылық және нәтижелі етіп жасай білуінде айқындалады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. 3000 конкурсных задач по математике. 2-е изд., испр. И доп. – М.: Рольф, Айрис-пресс, 1998. – 624с.
2. Оқушының логикалық ойлауын дамыту. Алип А. (ғылыми жетекшісі: Мусайбеков Р.К., ак. доцент, ж.ғ.м. Ш.Уәлиханов атындағы Көкшетау мемлекеттік университеті, Көкшетау қ-сы «Х студенттердің ғылым апталығына» арналған ғылыми – практикалық конференцияның материалдары, I том, Көкшетау 2018.
3. Кривоногов В.В., Нестандартные задания по математике: 5-11 классы. – М.: Издательство «Первое сентября», 2003.-224с.: ил.

УДК 517.957

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СПИНОВОЙ СИСТЕМЫ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Мырзакул А.Р., Нугманова Г.Н.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: akbota.myrzakul@gmail.com, nugmanovagn@gmail.com

Развитие нелинейной теории магнетизма, в свою очередь, поставило проблему построения интегрируемых обобщений уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным

потенциалом. Одно из таких обобщений с самосогласованным скалярным потенциалом было предложено в [1]. Некоторые алгебро-геометрические аспекты таких моделей изучены в работах [2-6]. Обобщенные уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом (ОУЛЛ-СВП) получены в работе [7], а также установлены их связь с движением кривых и поверхностей. В данной работе рассматривается ОУЛЛ-СВП.

1. Обобщенное уравнение Ландау-Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом

ОУЛЛ-СВП имеет вид

$$\mathbf{S}_t + 0.5\mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + \frac{2}{a}\mathbf{S} \wedge \mathbf{W} = 0, \quad (1a)$$

$$\mathbf{W}_x + 2a\mathbf{S} \wedge \mathbf{W} = 0, \quad (1b)$$

где $\wedge$ обозначает векторное произведение и

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3), \quad \mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3), \quad (2)$$

где длина векторов $\mathbf{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$, $\mathbf{W}^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = b$, $a, b = \text{const}$.

В большинстве случаев удобно работать с матричной формой этого уравнения, которая имеет вид

$$iS_t + \frac{1}{2}[S, S_{xx}] + \frac{1}{a}[S, W] = 0, \quad (3a)$$

$$iW_x + a[S, W] = 0, \quad (3b)$$

где, $S = \sum_{j=1}^3 S_j(x, t) \sigma_j$ матричный аналог спинного вектора, W - матричный вид векторного потенциала: $W = \sum_{j=1}^3 W_j(x, t) \sigma_j$, и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

матрицы Паули.

ОУЛЛ-СВП интегрируется методом обратной задачи рассеяния, и соответствующее линейная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\Phi_x = U\Phi, \quad (5a)$$

$$\Phi_t = V\Phi, \quad (5b)$$

где матричные пара Лакса U и V задаются как

$$U = -i\lambda S,$$

$$V = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \left(\frac{i}{\lambda + a} - \frac{i}{a} \right) W. \quad (6)$$

Здесь $V_2 = -2iS$, $V_1 = SS_x$.

Постановка задачи: Построить решение уравнения (3) методом Хироты.

Отметим, что данное уравнение содержит две неизвестные функции $S(x, t)$ и $W(x, t)$. При $W(x, t) = 0$ уравнение (3) переходит к известному уравнению Ландау-Лифшица, достаточно изученному уже около 80 лет. В данном исследовании сложность заключается в установлении связи между решениями функций $S(x, t)$ и $W(x, t)$.

2. Билинеаризация

По алгоритму построения решения солитонного уравнения методом Хироты сначала мы должны построить так называемую билинейную форму для уравнения (3). Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Утверждение 1. Билинейная форма ОУЛЛ-СВП (3) имеет вид

$$[iD_t + D_x^2](g \cdot f) - \frac{2}{a} p^* q = 0, \quad (7a)$$

$$D_x^2(f \cdot f) - \frac{2}{a} q^* q = 0, \quad (7b)$$

$$D_x(p \cdot f) - 2ia g^* q = 0, \quad (7c)$$

$$D_x(q \cdot f) + 2ia q f = 0, \quad (7d)$$

где f вещественная функция, g, p, q комплексные функции, операторы Хироты определяются как

$$D_x^l D_t^n f(x, t) \cdot g(x, t) = (\partial_x - \partial_{x'})^l (\partial_t - \partial_{t'})^n f(x, t) \cdot g(x', t') \big|_{x=x', t=t'}. \quad (8)$$

Доказательство. Перепишем систему (3) в компонентах S и W :

$$iS_t^+ + S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+ + \frac{2}{a} (S^+ W_3 - S_3 W^+) = 0, \quad (9a)$$

$$iS_t^- - S_{3xx} S^- + S_3 S_{xx}^- - \frac{2}{a} (S^- W_3 - S_3 W^-) = 0, \quad (9b)$$

$$2iS_{3t} + S_{xx}^+ S^- - S^+ S_{xx}^- + \frac{2}{a} (S^- W^+ - S^+ W^-) = 0, \quad (9c)$$

$$iW_x^+ - 2a(S_3 W^+ - S^+ W_3) = 0, \quad (9d)$$

$$iW_x^- - 2a(S^- W_3 - S_3 W^-) = 0, \quad (9e)$$

$$iW_{3x} - a(S^+ W^- - S^- W^+) = 0. \quad (9f)$$

Самосогласованный потенциал W берем в виде

$$W_3 = |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2, \quad W^+ = 2\varphi_1^* \varphi_2, \quad W^- = 2\varphi_1 \varphi_2^*, \quad (10)$$

где φ_1 и φ_2 являются решениями линейной системы (5). Учитывая (10), перепишем уравнения (9) в виде

$$iS_t^+ + S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+ + \frac{2}{a} (S^+ (|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) - 2S_3 \varphi_1^* \varphi_2) = 0, \quad (11a)$$

$$iS_t^- - S_{3xx} S^- + S_3 S_{xx}^- - \frac{2}{a} (S^- (|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) - 2S_3 \varphi_1 \varphi_2^*) = 0, \quad (11b)$$

$$2iS_{3t} + S_{xx}^+ S^- - S^+ S_{xx}^- + \frac{4}{a} (S^- \varphi_1^* \varphi_2 - S^+ \varphi_1 \varphi_2^*) = 0, \quad (11c)$$

$$\varphi_{1x} - ia(S_3 \varphi_1 + S^- \varphi_2) = 0, \quad (11d)$$

$$\varphi_{2x} - ia(S^+ \varphi_1 - S_3 \varphi_2) = 0. \quad (11e)$$

Используя обычный метод возмущений, рассмотрим стереографическое преобразование

$$S^+ = \frac{2\omega}{1+|\omega|^2}, \quad S^- = \frac{2\omega^*}{1+|\omega|^2}, \quad S_3 = \frac{1-|\omega|^2}{1+|\omega|^2}. \quad (12)$$

Отсюда имеем, что

$$\omega = \frac{S^+}{1+S_3}. \quad (13)$$

Таким образом уравнения (11) перепишем в виде

$$i\omega_t - \omega_{xx} + \frac{2\omega^* \omega_x^2}{1+|\omega|^2} + \frac{2}{a}(\omega\varphi_2^* + \varphi_1^*)(\omega\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad (14a)$$

$$\varphi_{1x} - \frac{ia}{1+|\omega|^2}((1-|\omega|^2)\varphi_1 + 2\omega^*\varphi_2) = 0, \quad (14b)$$

$$\varphi_{2x} - \frac{ia}{1+|\omega|^2}(2\omega\varphi_1 - (1-|\omega|^2)\varphi_2) = 0. \quad (14c)$$

Теперь преобразуем (14) к специальному виду, удобному для использования Паде-аппроксиманты [13]. Для этого используем замену:

$$\omega = \frac{g}{f}, \quad (15)$$

а функции φ_1 и φ_2 зададим в виде

$$\varphi_1 = \frac{p}{f}e^{iax}, \quad \varphi_2 = \frac{q}{f}e^{iax} \quad (16)$$

и найдем уравнения, которым удовлетворяют f, g, φ_1 и φ_2 . Подставляя (15) и (16), с учетом (8) дальнейшее преобразование уравнений (14) позволяет получить билинейную форму (7) для уравнений (11). Утверждение 1 доказано.

3. Солитонное решение

Используя билинейную форму (7), теперь мы можем построить солитонное решение для спиновой системы. Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Утверждение 2. Односолитонное решение уравнения (11) для спиновой матрицы S имеет вид

$$S^+ = \frac{2 \left(1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right) e^{i\theta}}{\left(1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2 + e^{i(\theta - \theta^*)}}, \quad (17a)$$

$$S_3 = \frac{\left(1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2 - e^{i(\theta - \theta^*)}}{\left(1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2 + e^{i(\theta - \theta^*)}}, \quad (17b)$$

а для потенциала W :

$$W^+ = - \frac{a \left(1 - \frac{a(l_1 + k_1^2)}{(k_1 - k_1^*)} \left(\frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{4(k_1 - k_1^*)} + a \right) e^{i(\theta - \theta^*)} \right) (l_1 + k_1^2) e^{i\theta}}{\left(1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2}, \quad (17c)$$

$$\begin{aligned}
W_3 = & \frac{\left(1 - \frac{a(l_1 + k_1^2)}{(k_1 - k_1^*)} \left(\frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{4(k_1 - k_1^*)} + a \right) e^{i(\theta - \theta^*)} \right) \left(1 - \frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{(k_1^* - k_1)} \left(\frac{a(l_1 + k_1^2)}{4(k_1^* - k_1)} + a \right) e^{i(\theta - \theta^*)} \right)}{\left(1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*) e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2} - \frac{\left(1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*) e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1^* - k_1)^2} \right)^2}{\left(1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*) e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2} + \\
& + \frac{\left(a^2 (l_1 + k_1^2)(l_1^* + k_1^{*2}) e^{i(\theta - \theta^*)} \right)}{4 \left(1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*) e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2},
\end{aligned} \tag{17d}$$

где $\theta = k_1 x + l_1 t + m_1$, k_1, l_1 и m_1 комплексные постоянные.

Доказательство. Разложим в уравнении (7) функции g , f , p и q в формальные ряды по параметру ε :

$$\begin{aligned}
g(x, t) &= \varepsilon g_1(x, t) + \varepsilon^3 g_3(x, t) + \dots, \\
f(x, t) &= 1 + \varepsilon^2 f_2(x, t) + \varepsilon^4 f_4(x, t) + \dots, \\
p(x, t) &= 1 + \varepsilon^2 p_2(x, t) + \varepsilon^4 p_4(x, t) + \dots, \\
q(x, t) &= \varepsilon q_1(x, t) + \varepsilon^3 q_3(x, t) + \dots.
\end{aligned} \tag{18}$$

N -солитонное решение исследуемого решения ищем в виде

$$g_1 = \sum_{j=1}^N \exp \theta_j, \quad \theta = k_1 x + l_1 t + m_1. \tag{19}$$

Возьмем случай $N=1$, при этом нетрудно убедиться, что $g_j = 0$ для $j \geq 3$ и $f_j = 0$ для $j \geq 4$ [1]. Аналогично имеем, что $q_j = 0$ для $j \geq 3$ и $p_j = 0$ для $j \geq 4$. Тогда для односолитонного случая

$$g = \varepsilon g_1, \quad p = 1 + \varepsilon^2 p_2, \quad q = \varepsilon q_1, \quad f = 1 + \varepsilon^2 f_2. \tag{20}$$

Подставляя выражения (20) в билинейную форму (7) имеем

$$i g_{1t} + g_{1xx} - \frac{2}{a} q_1 = 0, \tag{21a}$$

$$i g_{1t} f_2 - i g_1 f_{2t} + g_{1xx} f_2 - 2 g_{1x} f_{2x} + g_1 f_{2xx} - \frac{2}{a} p_2^* q_1 = 0, \tag{21b}$$

$$f_{2xx} - \frac{1}{a} q_1^* q_1 = 0, \tag{21c}$$

$$f_2 f_{2xx} - f_{2x} f_{2x} = 0, \tag{21d}$$

$$p_{2x} - f_{2x} - 2i a g_1^* q_1 = 0, \tag{21e}$$

$$p_{2x} f_2 - p_2 f_{2x} = 0, \tag{21f}$$

$$q_{1x} + 2i a q_1 = 0, \tag{21g}$$

$$q_{1x} f_2 - q_1 f_{2x} + 2i a q_1 f_2 = 0 \tag{21h}$$

Выбрав g_1 как $g_1 = e^{i\theta}$, с $\theta = k_1 x + l_1 t + m_1$, из системы уравнений (21) имеем для f_2 , q_1 , p_2 следующие выражения:

$$q_1 = -\frac{a}{2}(l_1 + k_1^2)e^{i\theta}, \quad (22)$$

$$f_2 = -\frac{a(l_1 + k_1^2)(l_1^* + k_1^{*2})}{(k_1 - k_1^*)^2}e^{i(\theta - \theta^*)}, \quad (23)$$

$$p_2 = -\frac{a(l_1 + k_1^2)}{(k_1 - k_1^*)} \left(\frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{4(k_1 - k_1^*)} + a \right) e^{i(\theta - \theta^*)}. \quad (24)$$

Уравнение (12) с учетом (15) в компонентах матрицы S имеет вид

$$S^+ = \frac{2fg}{f^2 + |g|^2}, \quad S^- = \frac{2fg^*}{f^2 + |g|^2}, \quad S_3 = \frac{f^2 - |g|^2}{f^2 + |g|^2}. \quad (25)$$

Подставляя (20) в (25) и учитывая (22)-(24), получим решения уравнений (11) в виде (17). Утверждение 2 доказано.

Список использованных источников

1. Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G., Lakshmanan M. A (2 + 1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures // Physics Letters A. – 1997. – Vol. 233. – P. 391-396.
2. Myrzakulov R., Danlybaeva A.K., Nugmanova G.N. Geometry and multidimensional soliton equations // Theoretical and Mathematical Physics. – 1999. – Vol.118, - N3, - P. 441-451.
3. Myrzakulov R., Lakshmanan M., Vijayalakshmi S., Danlybaeva A. A. Motion of curves and surfaces and nonlinear evolution equations in (2+1) dimensions // Journal of Mathematical Physics. – 1998. - Vol. 39, - N7. - P. 3765-3771.
4. Myrzakulov R., Nugmanova G., Syzdykova R. Gauge equivalence between (2+1)-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type equations // Journal of Physics A: Mathematical & Theoretical. – 1998. – Vol.31, - N47, - P. 9535-9545.
5. Zhang Zh-H., Deng M., Zhao W-Zh., Wu K. On the integrable inhomogeneous Myrzakulov-I equation // arXiv:nlin/0603069 v1 [nlin.SI]. – 2006.
6. Chen Ch., Zhou Z-X. Darboux Transformation and Exact Solutions of the Myrzakulov-I Equations // Chinese Physics Letters. – 2009. – Vol.26, - N8. – P. 080504.
7. Myrzakulov R., Mamyrbekova G., Nugmanova G., Lakshmanan M. Integrable (2 + 1)-Dimensional Spin Models with Self-Consistent Potentials // Symmetry. - 2015. - Vol. 7. - P.1352.

УДК 532.529

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ЖИДКОСТИ

Омаровой Ж.Ж., Шалабаева Б.С

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
zhaniya.omarova@bk.ru, shalabaeva.b.s@mail.ru

1. Введение. Изучение динамики отдельных капель вязкой жидкости в другой под действием различных физических полей представляет интерес для понимания многих технических задач в промышленности. Исследование динамики дисперсных систем в различных областях является актуальной проблемой современной науки и техники. Пример такие системы представляют эмульсии, которые встречаются во многих отраслях промышленности: нефтегазовой, строительной, автомобильной, пищевой, биотехнологии, медицине, а также в микро и нанотехнологиях. В нефтяной области эмульсии возникают практически на каждом этапе добычи, переработки и транспортировки нефтяного сырья [1].

Изучение взаимодействия большого количества деформируемых капель особенно важно для прогнозирования реологических свойств систем “жидкость-жидкость” и выявления различных эффектов при их движении, например, в микроканалах, моделирующих пористый пласт. Кроме того, можно отметить, что многие пищевые продукты также представляют собой дисперсные системы. Переработка высококонцентрированных пищевых эмульсий сопровождается различными физико-химическими и механическими процессами, изучение которых позволяет лучше контролировать свойства системы и эффективно управлять технологическим циклом производства. В медицине и биофизике задача о течении капель в микроканалах произвольной формы является моделью процессов, происходящих при движении клеток крови по разветвленным сетям капилляров. Моделирование стоковых течений в различных областях имеет значение также для микрогидродинамики при создании лабораторий на чипе.

В то же время, существует весьма ограниченное количество решений подобных задач. Проведение лабораторных исследований по изучению динамики капель эмульсий в микроканалах в широком диапазоне значений различных параметров, влияющих на физические свойства всей системы в целом, дорогостояще и трудновыполнимо. Компьютерное моделирование позволяет планировать, частично заменять и существенно дополнять эксперименты [2].

Изучение заряженных жидких капель начато лордом Рэлеем, который в 1882 году показал, что если электрический заряд Q больше критического значения Q_{cr} , то сферические капли становятся неустойчивыми [3]. Было обнаружено, что критический заряд $Q_{cr}=64\gamma\pi^2\epsilon_0 R^3$, где ϵ_0 - поверхностное натяжение, R - радиус капли, γ - диэлектрическая постоянная среды, в которой капля подвешена, после того, как капля становится неустойчивой, она разделяется на несколько меньших капелек. Более того, в недавних экспериментах [4] было замечено, что до деления капля превращается в вытянутый сфероид и развивает конический тип, из которого появляются тонкие 2 струи за конечное время. Анализ стабильности заряженных капель жидкости можно найти в [5], где доказано существование статических сплюснутых форм. Существует много работ, в которых используются численные методы для изучения движения осесимметричных капель. Наиболее популярным численным методом является метод граничных элементов (BEM). BEM используется в [6,7] для изучения эволюции капли жидкости, прикрепленной к поверхности, под воздействием внешнего электрического поля. Аналогично, [8] использует BEM для численного исследования эволюции капли жидкости под действием электрического поля, когда капля погружается во внешнюю диэлектрическую жидкость. Что касается исследования заряженных капель жидкости, то [9] объединяет аналитические и численные результаты для изучения существования и устойчивости, стационарных не сферических форм для заряженных изолированных капелек.

Эволюция капель заряженных жидкостей актуальны во многих прикладных задачах, таких как явления, определяющие начало дождя, двигатели с полевым выбросом (FEED), микрожидкостной чип, электронная бумага и т.д [10].

В результате изучения данной темы была использована математическая модель движения капли, в случае, когда капли проводящей вязкой жидкости погружаются в диэлектрическую вязкую жидкость бесконечной протяженности и развиваются под влиянием капиллярности и электростатического отталкивания.

2. Математическая модель заряженной капли жидкости

Рассмотрим каплю D жидкости A с вязкостью μ_{in} суспендированной в бесконечной жидкости B , с вязкостью μ_{out} . (Рисунок 1). Как внутренняя, так и внешняя жидкости развиваются в соответствии со стоковым приближением уравнений Навье-Стокса:

$$\mu_{in}\nabla^2 u(x) = \nabla p(x), \quad x \in D(t) \quad (2.1a)$$

$$\mu_{out}\nabla^2 u(x) = \nabla p(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D(t) \quad (2.1b)$$

$$\nabla u(x) = 0, \quad x \notin \partial D \quad (2.1c)$$

где u - поле скорости, а p - давление в жидкости. Из уравнений (2.1a) - (2.1c) сразу следует, что давление p является гармонической функцией вне границы D :

$$\nabla^2 p(x, t) = 0, x \notin \partial D \quad (2.2)$$

Движения капли зависит от t , как объясняется ниже. Уравнения (2.1a) - (2.1c) являются допустимым приближением при условии, что число Рейнольдса невелико:

$$Re = \frac{uR\rho}{\mu} \ll 1 \quad (2.3)$$

где u - типичная скорость жидкости, R - характерная длина капли, ρ - плотность жидкости, а μ - вязкость. Размер каплей, которые мы изучаем, составляет порядок микронов, и при этом условии эта гипотеза обычно выполняется. С другой стороны, капли достаточно велики, чтобы удовлетворить гипотезе континуума, которая диктует, что совокупность движения молекул жидкости может рассматриваться как континуум

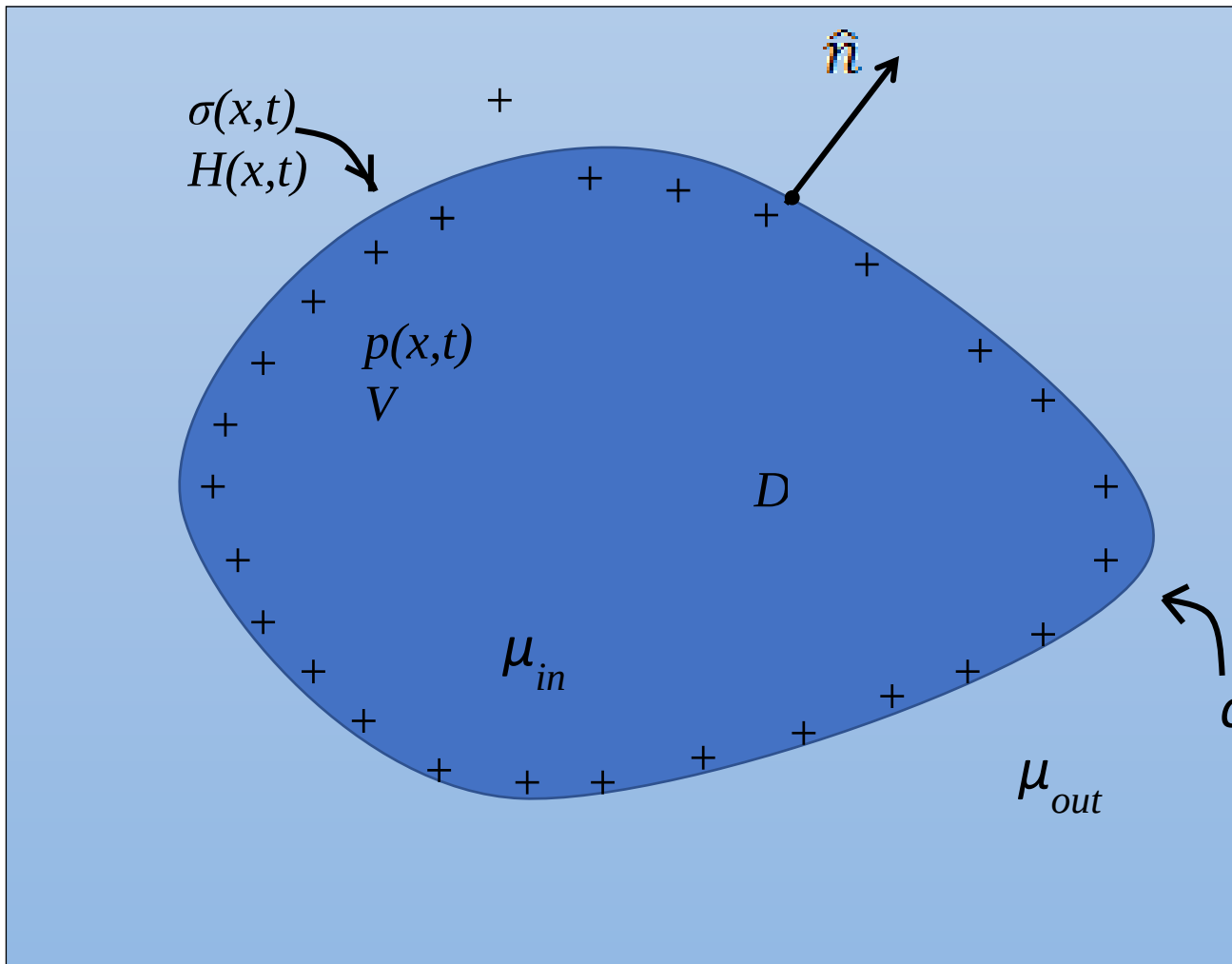


Рисунок 1. Капля заряженной жидкости

Стоит отметить что мы также игнорируем влияние испарения на эволюцию капли. Временной масштаб движения свободной границы составляет порядка миллисекунд, что явно недостаточно для значительных потерь массы из-за испарения.

Внутренняя жидкость является идеальным электрическим проводником, тогда как внешняя жидкость является идеальным электрическим изолятором. Кроме того, капля содержит количество электрического заряда Q . Внутри проводящей внутренней жидкости заряды отталкиваются друг от друга и поэтому движутся к свободной границе. Поскольку они не могут убежать в изолирующую внешнюю жидкость, они в конечном итоге распределяются вдоль свободной границы ∂D с плотностью поверхностного заряда σ и они создают электрическое поле с электрическим потенциалом V . Электрический потенциал V постоянный внутри капли (Рисунок 1)

$$V(x, t) = V_0, \quad \text{для } x \in D \quad (2.4)$$

и удовлетворяет уравнению Лапласа вне D

$$\nabla^2 V(x, t) = 0, \quad \text{для } x \notin D \quad (2.5)$$

На свободной границе потенциал V непрерывен, но нормальная производная $\frac{\partial V}{\partial n}$ является разрывным. Скачок нормальной производной и плотности поверхностного заряда σ на свободной границе связаны:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{\partial D} = -\frac{\sigma}{\epsilon_2} \quad (2.6)$$

где $\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{\partial D}$ обозначает скачок величины через ∂D и ϵ_0 - диэлектрическая проницаемость окружающей среды. Плотность поверхностного заряда также удовлетворяет условию

$$\int_{\partial D} \sigma ds = Q \quad (2.7)$$

В силу закона сохранения заряда Q постоянна во времени.

Для поля скорости u соответствует граничное условие на свободной границе:

$$[S\hat{n}]_{\partial D} = \left(2\gamma H - \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 \right) \hat{n}, \quad \text{или} \quad [S\hat{n}]_{\partial D} = \left(2\gamma H - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \right) \hat{n} \quad (2.8)$$

где γ - константа капиллярности, H - средняя кривизна, а $\hat{n}$ - (нормальный вектор направленности) свободной границы, а S - тензор напряжений определяется следующим образом:

$$S_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (2.9)$$

Заметим, что это граничное условие связывает поле скорости жидкости с электростатическим полем (через плотность поверхностного заряда σ).

Заметим что, движение самой свободной границы определяется кинематическим условием (движения координаты x)

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t), \quad x \in \partial D \quad (2.10)$$

Интересная динамика возникает от существования двух противоположных сил, действующих на границе раздела между двумя жидкостями, капиллярности ($2\gamma H$ -терм в (2.8)) и электростатической силой (член $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ в (2.8)). В то время как капиллярность пытается сделать каплю максимально гладкой и сферической, электрические силы стремятся усилить любые «удары» формы капли, так как заряды накапливаются в частях свободной границы с высокой кривизной и тянут на поверхность в этих точках (Рисунок 2):

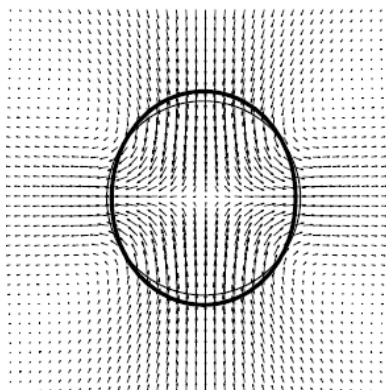


Рисунок 2. Изменение границы капли

Далее мы выводим явные линейные решения математической модели.

Наша цель - понять, как стабильность капли зависит от значений заряда, объема, поверхностного натяжения, вязкости, а также от формы капли.

3. Переход к сферическим координатам

Относительно просто проверить, что шар с радиусом R является равновесным решением для модели.

Поскольку на границе заряженной капли жидкости происходят возмущения, то для изучения возмущения сферы (сферической поверхности) удобно перейти к сферическим координатам (r, θ, φ) , где $r \geq 0$ - расстояние от точки от начала координат, $\theta \in [0, \pi]$ - полярный угол и $\varphi \in (0, 2\pi]$ - азимутальный угол (Рисунок 3).

Точка $x \in R^3$ со сферическими координатами (r, θ, φ) имеет декартовы координаты:

$$x(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \quad (3.1)$$

Базовые векторы e_r, e_θ, e_φ в точке x образуют ортонормированный базис, и поэтому любой вектор может быть однозначно выражен как линейная комбинация базовых векторов. Основными векторами могут быть выраженные в декартовых координатах как

$$\hat{e}_r = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \quad (3.2)$$

$$\hat{e}_\theta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \quad (3.3)$$

$$\hat{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad (3.4)$$

Уравнение сферы принимает следующий очень простой вид в сферических координатах

$$x \in \partial D \iff r = R \quad (3.5)$$

Чтобы решение для шара было статическим решением, скорость должна быть равна нулю всюду:

$$u(x) = 0, \quad x \in R^3 \quad (3.6)$$

так что кинематическое условие (2.10) переходит в условие равновесия

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad x \in \partial D \quad (3.7)$$

Давление p равно постоянной внутри сферы и нулю вне

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2\gamma}{R} - \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4 \epsilon_0}, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases} \quad (3.8)$$

и, следовательно, уравнения (2.1a) - (2.1c) тривиально выполнены.

Электрический потенциал V равен постоянной внутри и распадается как r^{-1} вне сферы

$$V(x) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & x \in D \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & x \notin D \end{cases}, \quad x \in D \quad (3.9)$$

Ясно, что потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа (2.5) всюду, а также удовлетворяет (2.4) на поверхности сферы.

Распределение поверхностного заряда σ постоянное на сфере

$$\sigma(x) = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad x \in \partial D \quad (3.10)$$

и удовлетворяет уравнению (2.7):

$$\int_{\partial D} \sigma(x) ds(x) = 4\pi R^2 \frac{Q}{4\pi R^2} = Q \quad (3.11)$$

Для проверки граничного условия (2.6) заметим, что нормальный вектор $\hat{n}$ в любой точке сферы равен базисному вектору $\hat{e}_r$. Поэтому нормальная производная $\frac{\partial V(x)}{\partial n}$ потенциала V в точке x сферы равна частной производной $\frac{\partial V(x)}{\partial r}$. Кроме того, поскольку V постоянно внутри сферы, то частные производные там равны нулю и, следовательно, скачок нормальной производной равен частной производной от «внешней» ветви V_{out} (3.9) по r :

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{\partial D} = \frac{\partial V_{out}}{\partial n} = \frac{\partial V_{out}}{\partial r} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)' \Big|_{r=R} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (3.12)$$

которая, равна $-\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ в соответствии с (2.6).

Наконец, выполняется граничное условие (2.8). Так как скорость u равна нулю всюду, ее частные производные также равны нулю, а тензор напряжений S сводится к

$$S_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.13)$$

и, следовательно, скачок в левой части (2.8) равен

$$[S\hat{n}]_{\partial D} = -[p]_{\partial D} \hat{n} = -\left(\frac{2\gamma}{R} - \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4 \epsilon_0} \right) \hat{n} \quad (3.14)$$

Хорошо известно, что средняя кривизна H сферы радиуса R равна

$$H = \frac{1}{R} \quad (3.15)$$

и, следовательно, правая часть (2.8) равна левой стороне:

$$\left(2\gamma H - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \right) \hat{n} = \left(\frac{2\gamma}{R} - \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \right) \hat{n} = \left(\frac{2\gamma}{R} - \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4 \epsilon_0} \right) \hat{n} \quad (3.16)$$

3.2. Изменение границы сферы (возмущенная): линеаризованные решения

Рассмотрим сферу радиуса R , возмущенную вещественной частью сферической гармоники $\mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi)$,

$$r(\theta, \varphi) = \epsilon \operatorname{Re}\{\mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi)\} = R + \epsilon P_l^m(\cos\theta) \cos(m\varphi) \quad (3.17)$$

Здесь определены сферические гармоники $\mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi)$ (для $l, m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq |m| \leq l$)

$$\mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (3.18)$$

Связанные многочлены Лежандра $P_l^m(x)$ определяются как,

$$P_l^m = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (3.19)$$

Сферические гармоники $Y_l^m(\theta, \varphi)$ можно умножать с соответствующими степенями r , чтобы сформировать солидные гармоники, которые удовлетворяют уравнению Лапласа $\nabla^2 f = 0$.

Имеются два случая: • Твердые гармоники формы:

$$f(r, \theta, \varphi) = Cr^l Y_l^m(\theta, \varphi), \quad C \neq 0$$

определены во всех $\mathbf{R}^3$ и расходятся при $r \rightarrow \infty$. Постоянная функция $f \equiv 1$ является частным случаем при $l = m = 0$.

• Твердые гармоники формы: $f(r, \theta, \varphi) = Cr^{-l-1} Y_l^m(\theta, \varphi)$, $C \neq 0$ не определены для $r = 0$ и ограничены при $r \rightarrow \infty$

Функция $f(r) = r^{-1}$ является частным случаем, снова для $l = m = 0$.

Более того, как действительная, так и мнимая часть твердых гармоник, также удовлетворяют уравнению Лапласа.

Проверим утверждение, что если свободная граница имеет форму, описываемую формулой (3.17) при $t = 0$, то в момент времени $t \geq 0$,

$$r(\theta, \varphi) = R + \epsilon P_l^m(\cos\theta) \cos(m\varphi) e^{gt} + O(\epsilon^2) \quad (3.21)$$

где мы использовали обозначение «большой O » для обозначения членов более высокого порядка разложения Тейлора по ϵ (Рисунок 3).

Здесь мы покажем, что параметр g , определяющий скорость роста возмущения, задается формулой

$$g = \frac{l(l-1)(l+1)(2l+1)(Q^2 - 16(l+2)\pi^2 R^3 \gamma \epsilon_0 (\mu_{in} + \mu_{out}))}{16\pi^2 R^4 \epsilon_0 ((2l^2 + 4l + 3)\mu_{in} + 2l(l+2)\mu_{out}(2(l^2 - 1)\mu_{in} + (2l^2 + 1)\mu_{out}))} \quad (3.22)$$

Алгебраические манипуляции, необходимые для вывода (3.22) и проверки (3.21), очень сложны. В результате мы в значительной степени использовали математическую алгебру Mathematica в следующих расчетах.

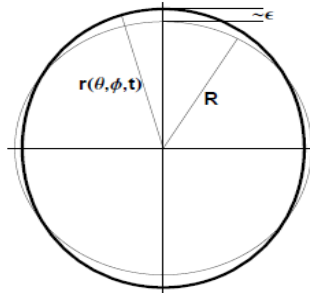


Рисунок 3. Сфера возмущена гармонической функцией с амплитудой ϵ

3.3. Нормальная векторная и средняя кривизна

Сначала мы получим нормальный вектор n и среднюю кривизну H на свободной границе за время $t \geq 0$. Параметризуем поверхность по углам (θ, φ) :

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi)(\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta) = r(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_r \quad (3.23)$$

Нормальный вектор n может быть рассчитан путем нормировки поперечного произведения частных производных

$$\begin{aligned} \hat{n}(\theta, \varphi) &= \frac{\mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\varphi|} = \\ &= \hat{\mathbf{e}}_r + \epsilon \frac{(l+m)p_{l-1}^m(\cos\theta) - l \cos\theta p_l^m(\cos\theta)}{R \sin\theta} \cos(m\varphi) e^{gt} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \epsilon \frac{m}{R \sin\theta} \sin(m\varphi) p_l^m(\cos\theta) e^{gt} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + O(\epsilon^2) \\ |\hat{n}| &= 1 + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Средняя кривизна H может быть определена, используя ряд математических вычислений второй фундаментальной формы поверхности, которые мы здесь опустим.

Средняя кривизна H задается формулой

$$H(\theta, \varphi) = \frac{eG - 2fF + gE}{2J^2} = \frac{1}{R} + \epsilon \frac{l^2 + l - 2}{2R^2} p_l^m(\cos\theta) \cos(m\varphi) e^{gt} + O(\epsilon^2) \quad (3.33)$$

3.4. Электрический потенциал и плотность заряда

Покажем, что электрический потенциал V задается формулой

$$V(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{A}{r}, & r \leq R \\ \frac{A}{r} + \epsilon Br^{-l-1} \cos(m\varphi) p_l^m(\cos\theta) e^{gt} + O(\epsilon^2), & r > R \end{cases} \quad (3.34)$$

где $A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$, $B = \frac{QR^{l-1}}{4\pi\epsilon_0}$

Во-первых, внешняя ветвь (3.34) удовлетворяет уравнению Лапласа (2.5) во внешности поверхности, так как оба члена нулевого и первого порядка являются сплошными гармониками, такие, что $V \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Кроме того, функция V должна быть непрерывной на свободной границе, и поэтому, если подставить $r = R$ из (3.21) во внешнюю ветвь (3.34), мы должны получить R (плюс члены порядка ϵ^2). После некоторых алгебраических манипуляций это условие сводится к

$$AR^l - BR = 0 \Rightarrow B = AR^{l-1} \quad (3.37)$$

Непрерывность V на границе также гарантирует постоянство V на границе (выражение (2.4)).

Для проверки условия (2.7) нам нужно сначала рассчитать поверхностную плотность заряда на поверхности.

Используя (2.6), находим

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{A\epsilon_0}{R^2} + \epsilon \frac{A(l-1)\epsilon_0}{R^3} \cos(m\varphi) p_l^m(\cos\theta) e^{gt} + O(\epsilon^2) \quad (3.38)$$

Интегрируя σ по всей поверхности, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \sigma ds &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \varphi) r(\theta, \varphi^2) \sin\theta d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ A\epsilon_0 \sin\theta + \epsilon \frac{A(l+1)\epsilon_0}{R} \sin\theta \cos(m\varphi) p_l^m(\cos\theta) e^{gt} \right\} d\varphi d\theta + O(\epsilon^2) = 4\pi\epsilon_0 A + \\ &+ \epsilon \frac{A(l+1)\epsilon_0}{R} e^{gt} \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi \int_0^\pi \sin\theta p_l^m(\cos\theta) d\theta + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Так как член первого порядка (3.39) равен нулю, то условие (2.7) плотность заряда становится:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 A + O(\epsilon^2) \quad (3.40)$$

В результате изучения данной темы рассмотрена подходящая математическая модель заряженной капли жидкости. В данной работе рассматривалось изменение формы заряженной капли жидкости. Для понимания как стабильность капли зависит от значений заряда, объема, поверхностного натяжения, вязкости, а также от формы капли получены явные линейные решения математической модели. Представлен анализ линейной устойчивости семейства решений, возникающих из-за возмущения сферы радиуса R (являющейся равновесным решением). Были найдены явные линейные решения математической модели: нормальная векторная и средняя кривизна, электрический потенциал и плотность заряда. Найдены явные выражения для скорости роста каждого решения и для критического количества заряда, которое должно быть превышено, чтобы решение стало неустойчивым.

По итогам работы можно увидеть как стабильность капли зависит от значений заряда, объема, поверхностного натяжения и вязкости, а также от формы капли.

Список используемых источников

- 1 Абрамова О.А., Иткулова Ю.А., Гумеров Н.А. Моделирование трехмерного движения деформируемых капель в стоксовом режиме методом граничных элементов // Вычисл. Мех. Сплош. Сред. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 214-223I.
- 2 G. Loscertales, A. Barrero, I. Guerrero, R. Cortijo, M. Marquez, A. M. Gañan-Calvo, Micro/Nano Encapsulation
- 3 Lord Rayleigh, On the Equilibrium of Liquid Conducting Masses Charged with Electricity, Proc.Roy.Soc. 184-186, 1882
- 4 M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical
- 5 Via Electrified Coaxial Liquid Jets, Science, Vol. 295, 5560 (2002), 1695-1698.
- 6 Архипов В. А. Курс лекций по теории и практике закрученных потоков./ В. А. Архипов. — Томск : Изд-во ТГУ, 1999. — 60 с.
- 7 N. A. Pelekasis, J. A. Tsamopoulos, G. D. Manolis, Equilibrium shapes and stability of charged and conducting.
- 8 Advances in Computation: Theory and Practice, Vol. 7, Kananskis, 2001
- 9 A. Z. Zinchenko, M. A. Rother, R. H. Davis, A novel boundary-integral algorithm for viscous interaction of deformable drops, Phys. Fluids, Vol. 9. No. 6, June 1997
- 9 B. Bazhlekov, F. N. van de Vosse, H. E. H. Meijer, 3D Numerical Simulation of Drop Coalescence, Advances in Computation: Theory and Practice, Vol. 7, Kananskis, 2001.
- 10 R. A. Hayes and B. J. Feenstra, Video speed electronic paper based on electrowetting, Nature, 425, pp. 383-385 (2003).

ИНТЕРАКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ» В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Рабинович Б.В., Карманов М.А.

Северо-Казахстанский государственный университет им. М. Козыбаева, Петропавловск, Казахстан

E-mail: BVR130758@mail.ru, karmanovmihail@mail.ru

Интерактивное обучение основано на прямом взаимодействии обучаемого с внешним учебным окружением и приобретением новых знаний на основе старых, во взаимодействии со всей образовательной средой. Реализация интерактивного обучения, при помощи погружения в разнообразные формы общения и взаимодействия, повышается интерес к изучаемому предмету, учащийся добровольно начинает включаться в активную познавательную учебную деятельность. Средства обучения в этом случае выступают движущими силами, которые объединяют все компоненты процесса усвоения новых знаний в единое целое. Разнообразие средств обучения говорит о том, что общение может основываться на разных типах взаимодействия: с различными группами людей; с индивидом, со специальными устройствами, обеспечивающими непрерывность диалога, например, компьютеры или только интерактивная доска. С накоплением данных о позитивном влиянии индивидов в специально создаваемых группах, этот феномен начали использовать в образовании детей и взрослых в конце XX века [1].

В 80–90 годы XX века ряде работ В. К. Дьяченко убедительно представлена перспективность и эффективность технологии коллективного способа обучения, который строится на учебном диалоге. Неоспоримым стало то, что обучение в малых группах не может быть неэффективным, так как если слушатель не единственный, он не может не слушать партнера, контроль результатов работы обучаемого обучающим усиливает эффект. Дальше происходит своеобразный обмен ролями, в следствии которого обучаемый становится обучающим. При данной модели обучения создаются предпосылки к активизации познавательной деятельности. Активизация познавательной деятельности учащихся подразумевает некую целенаправ-

ленную педагогическую деятельность учителя по повышению и стимулированию учебной активности учащихся. При традиционных методах обучения для активизации познавательной активности использовали частую смену методов обучения во время урока, но ведущую роль всегда в этих методах занимал учитель. На современном этапе развития педагогической науки разработаны учебные технологии, основой которых является деятельность самих учеников, а учитель выступает только в роли помощника, его деятельность завуалирована и часто со стороны кажется, что ученики все решают и делают сами. Учитель должен создавать особую атмосферу, в которой ученики вступают в различные формы взаимодействия [2, с.60].

Итак, в интерактивных методах и обучающиеся, и педагоги выступают субъектами обучения, педагоги исполняют роль организатора процесса обучения, лидера класса, группы, консультанта, организуют взаимодействие всех обучающихся.

В геометрии используются различные методы решения задач – это синтетический метод, векторный, метод координат, метод преобразований и другие. Данные методы занимают различное положение в школьной программе. Основным методом принято считать синтетический, а из оставшихся наиболее высокое положение занимает метод координат, так как он тесно связан с алгеброй.

Координатный метод входит в программы изучения геометрии как в школе, так и в вузе. Как следствие, необходима методика изучения метода координат, которая бы позволила учащимся решать различные задачи координатным методом, но не показывающая этот метод как основной при решении геометрических задач. Но интерактивные методы изучения данной темы слабо развиты, поэтому необходимо уделить особое внимание разработке интерактивных методик для изучения данной темы.

Для большей эффективности работы в малых группах следует организовывать состав групп так что бы уровень знаний в них был равным, в каждой группе должны быть как слабые, так и сильные ученики. На начальном этапе работы в малых группах следует давать задания средней сложности, что бы члены группы научились взаимодействовать друг с другом. На уроках по закреплению метода координат в качестве такого задания можно выдать каждой группе задание на установление соответствия.

Учащимся предлагается поставить в соответствие формулу величине, по которой она вычисляется. Каждой группе выдается карточка на которой цветными карандашами нужно закрасить соответствующие формулы

Карточка 1

1	Длина вектора	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
2	Уравнение окружности	$(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$
3	Координаты вектора	$\vec{a} = k\vec{b}$
4	Середина отрезка	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
5	Уравнение прямой	$\sqrt{x^2 + y^2}$
6	Расстояние между точками	$(\frac{x_1 - x_2}{2}; \frac{y_1 - y_2}{2})$
7	Условие коллинеарности векторов	$ax + by + c = 0$

Затем, группы обмениваются карточками и проверяют друг друга (правильный вариант закрашивания карточки выводится на доске). Задания такого типа являются не только актуализацией знаний по данной теме, но и отлично подходят для поднятия уровня познавательной активности в группах.

На следующих этапах урока можно уже давать более сложные задания, на решение которых при индивидуальной работе учащимся потребовалось бы больше времени. Но бла-

годаря работе в малых группах и правильно подобранному составу этих групп ученики с легкостью справятся с заданиями.

Каждая группа получает задачу, к которой надо составить алгоритм решения из предложенных высказываний (высказывания даются на карточках).

Карточка 2

Вычислить длины сторон.
Доказать, что параллелограмм является ромбом.
Сравнить длины сторон.
Вычислить площадь.
Выяснить вид треугольника.
Доказать, что четырехугольник является параллелограммом.
Найти координаты вершин.

1-я группа.

Доказать, что треугольник MNB , вершины которого имеют координаты $M(-5;-2)$, $N(5;-4)$, $B(-2;-13)$, является равнобедренным. Найдите площадь этого треугольника.

2-я группа.

В четырехугольнике $MNBQ$ вершины имеют координаты $M(-2;-3)$, $N(1;4)$, $B(8;7)$, $Q(5;0)$, точка $O(3;2)$ является точкой пересечения диагоналей. Докажите, что $MNBQ$ – ромб и найдите его площадь.

3-я группа.

Прямые, содержащие стороны треугольника, заданы уравнениями:

$$3x - 8y + 52 = 0; 11x - 5y - 77 = 0; 8x + 3y - 56 = 0.$$

Определите вид треугольника и найдите его площадь.

Каждая группа решает свою задачу согласно составленному по карточке алгоритму.

Далее каждая группа представляет свою задачу (на доске, заранее подготовлены чертежи к задачам и записано условие). Представители других групп делают замечания по предложенному решению, вносят, если необходимо свои предложения. После подведения итогов каждый ученик заполняет бланк самооценивания.

Бланк самооценивания.

№		Баллы	самооценка
1	Знаю, умею применять формулы и находить алгоритм решения задач.	«9-10»	
2	Знаю и умею решать задачи, но вызывает затруднение выбор нужной формулы.	«7-8»	
3	Знаю формулы и умею решать задачи по заданному алгоритму, но сам затрудняюсь разработать алгоритм.	«5-6»	

Работа в малых группах является обширным полем для деятельности учителя. На уроках с использованием данной методики каждый ученик может почувствовать свою нужность в коллективе и обмениваться знаниями с участниками своей группы. Благодаря совместной работе ученики научатся отстаивать свою точку зрения и выслушивать мнение других.

Список используемых источников

1. Голуб, Б. А. Основы общей дидактики. Учеб. Пособие для студ. Педвузов. — М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999. — 96 с.
2. Горенков, Е. М. Технологические особенности совместной деятельности учителя и учащихся в дидактической системе Л. В. Занкова.// Начальная школа 2002, № 12 с. 57–62

ИНТЕРАКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «ПРИМЕНЕНИЕ ПОДОБИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ»

Рабинович Б.В., Игликқызы Ж.

*Северо-Казахстанский государственный университет им. М. Козыбаева, Петропавловск,
Казахстан*

E-mail: BVR130758@mail.ru, zhuldyz_5555@mail.ru

Происходящие изменения в нашем обществе создали реальные перспективы для модернизации всей системы образования, которые находят свой отклик в разработке и введении в практику работы школы элементов нового содержания, новых образовательных методов в обращении к мировому педагогическому опыту. Сегодня многие методические новации и инновации взаимосвязаны с осуществлением интерактивного обучения, потому что интерактивное обучение имеет огромные потенциальные возможности для реализации социального заказа современного общества. Кроме того, среди учителей математики нередко существует мнение, что единственным критерием внедрения интерактивного обучения в образовательную практику является непосредственное использование компьютерных средств обучения.

Следовательно, понимание того, что именно стоит за термином интерактивное обучение не стало пока достоянием широкой педагогической практики. Уточним основную характеристику самого понятия. Интерактивное обучение – обучение, построенное на взаимодействии обучающегося с учебной средой и окружением, которая служит областью осваиваемого опыта.

Важным является и тот факт, что в процессе обучения учащиеся взаимодействуют и с физическим, и с социальным окружением, и с изучаемым содержанием. И все три вида активности взаимосвязаны, различны и в обязательном порядке присутствуют на уроке. Назовем их. Физическая активность – учащиеся меняют рабочее место, говорят, пишут, слушают, рисуют и т.д. Социальная активность – учащиеся задают вопросы, отвечают, обмениваются мнениями, обсуждают и т.д. Познавательная активность – учащиеся вносят дополнения и поправки в изложение учителя, сами находят решение проблем, таким образом, получая опыт и навыки решения определенных математических задач и т.д. Таким образом, интерактивное обучение – это обучение, погруженное в общение, оно сохраняет конечную цель и основное содержание предмета, но видоизменяет формы и приемы ведения занятия [2].

Как показывает опыт, при изучении темы «Подобия плоскости» у обучающихся возникают трудности, связанные, по всей видимости, со специфическим образом мышления, которое требуется для успешного применения преобразований. Поэтому выход из данной проблемы мы видим в применении интерактивных методов обучения. Данные методы способствуют развитию функциональной грамотности, креативного мышления, когнитивной компетентности, а значит, могут положительно повлиять на развитие образного мышления.

Рассмотрим пример применения интерактивных методов обучения, а именно – обучение в малых группах, на примере изучения темы «Подобие треугольников». Отметим, что эта тема изучается в рамках темы «Подобия плоскости».

Макет урока

Тема: «Применение подобия треугольников для решения задач».

Цель урока – способствовать формированию умения применять признаки подобия треугольников к решению задач

План урока

1. Организационный момент (2 мин).
2. Актуализация опорных знаний (7 мин).
3. Работа в группах (23 мин).
4. Обсуждение полученных результатов (5 мин).
5. Информация о домашнем задании (1 мин).
6. Подведение итогов урока (2 мин).

Актуализация опорных знаний

Учащиеся делятся на группы по 4-5 человека, получают карточки с математическим диктантом. В заданиях 1-3 необходимо дополнить предложение, а в заданиях 4-5 ответить на данные вопросы.

Карточка №1

1. Запись $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$ означает, что отрезки AB и CD ... отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 .
2. Число, равное сторон треугольников, называется.....
3. Отношение периметров двух подобных треугольников равно.....
4. Площади двух подобных треугольников равны 75см^2 и 300см^2 . Одна из сторон второго треугольника равна 9см . Чему равна сходственная сторона первого треугольника?
5. Подобны ли треугольники ABC и KDE , если $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 75^\circ$, $\angle K = 35^\circ$, $\angle E = 70^\circ$, $AB = 5\text{см}$, $BC = 7\text{см}$, $AC = 8\text{см}$, $KD = 10\text{см}$, $DE = 14\text{см}$, $KE = 16\text{см}$.

Карточка №2

1. Отношением отрезков AB и CD называется отношение
 2. Два треугольника называются подобными, если их и стороны одного треугольника пропорциональны другого.
 3. Отношение площадей двух подобных треугольников равно
 4. Сходственные стороны двух подобных треугольников равны 5дм и 10дм . Периметр первого треугольника равен 60дм . Чему равен периметр второго треугольника?
- Подобны ли треугольники ABC и KDE , если $\angle A = 25^\circ$, $\angle B = 75^\circ$, $\angle K = 25^\circ$, $\angle E = 80^\circ$, $AB = 15\text{см}$, $BC = 21\text{см}$, $AC = 24\text{см}$, $KD = 5\text{см}$, $DE = 7\text{см}$, $KE = 8\text{см}$.

Учащиеся передают карточки с математическим диктантом другой группе и проверяют с помощью заранее подготовленного решения на слайде или отвороте доски, затем обсуждают, какие были допущены ошибки.

Работа в группах

Учащимся предлагается поработать в группах. Им предстоит решить и оформить задачу на плакате с помощью чертежных инструментов и цветных карандашей (фломастеров). Во-первых – задача должна быть решена правильно, во-вторых – учитывается оформление задачи (все доступно изложено) и третий критерий – определяют сами учащиеся (мнение большинства).

Задача: Высоты BM и CN остроугольного неравобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H . Сторону BC продолжили до пересечения с прямой MN в точке K . Сколько пар подобных треугольников при этом получилось [1]?

В процессе решения задачи учащиеся могут задавать вопросы непосредственно по заданию. На слайде будут представлены вопросы:

1. Какие вы знаете признаки подобия треугольников?
2. Какие углы называются вертикальными?
3. Каким свойством обладают вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу?
4. Лежат ли точки B, N, M, C на одной окружности? Почему?
5. Чему равна сумма противоположных углов во вписанном четырехугольнике?

Эта серия вопросов, которые подводит к решению данной задачи. Далее, группы демонстрируют свои плакаты с решениями (по количеству найденных подобных треугольников) и одним спикером для представления данной задачи.

В программе «Живая геометрия» заранее подготовлено наглядное решение задачи для проверки учащихся (рисунок 1).

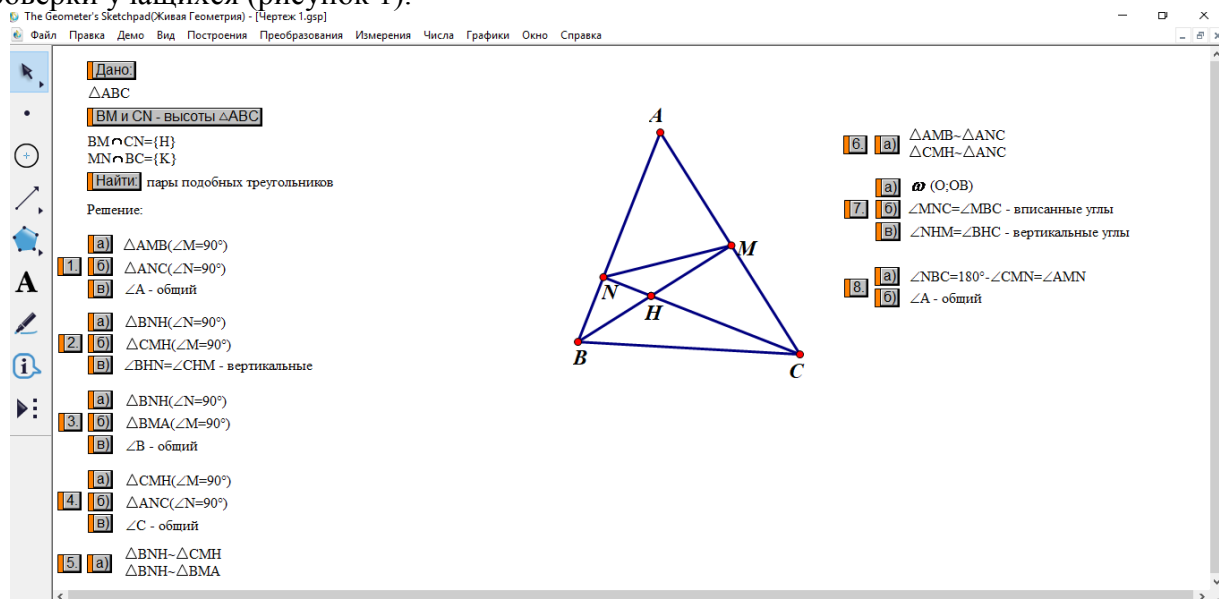


Рисунок 1. Оформление в программе «Живая геометрия»

Подведение итогов урока

Учащиеся по очереди высказываются одним предложением, выбирая начало фразы из рефлексивного экрана на интерактивной доске.

На уроке осуществляется обсуждение результатов в группе, поиск ответов на поставленные друг другу вопросы. Элемент творчества проявляется в оформлении закладок, в образности или точности и лаконичности комментариев к тексту. В результате такой систематической работы развивается не только предметная, но информационно-коммуникативная компетентность обучающихся.

Таким образом, наличие специально организованных учебных текстов и электронной поддержки к ним делают возможным интерактивное обучение математике на уровне методической системы. Однако для реализации этой возможности должно быть самое главное – желание учителя сделать его интерактивным.

Список используемых источников

1. Гордин Р.К. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия / А.Л. Семенова, И.В. Яценко. – М.: МЦНМО, 2013. – 176 с.
2. Сластенин В.А. Педагогика: учебн. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Сластенин, И.Ф.Исаев, Е.Н. Шиянов. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 576 с.

РАБОТА В МАЛЫХ ГРУППАХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ В ГУМАНИТАРНЫХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛАССАХ

Рабинович Б.В., Чепикова А.Н.

Северо-Казахстанский государственный университет им. М. Козыбаева, Петропавловск, Казахстан

E-mail: BVR130758@mail.ru, anna121296@mail.ru

Неудовлетворенность результатами образовательного процесса в основной школе во многих странах подвигла к реформированию системы образования, в Республике Казахстан в том числе. Поэтому в современном Казахстане идет становление новой системы образования, ориентированной на мировое образовательное пространство. Этот процесс сопровождается существенными изменениями в педагогической теории и практике.

Качественные изменения в любой области нашей жизни, а тем более в образовании невозможны без формирования нового взгляда учителя на свое место и роль в учебном процессе.

Реализация обновленного подхода в образовании возможна лишь при учете индивидуальных особенностей ребенка. Об этом в своих работах говорили Л.В. Выготский (теория зоны ближайшего развития ребенка), П.Я. Гальперин (теория поэтапного формирования умственных действий), А.А. Леонтьев (психология общения) и другие [1]. Реализация данного подхода предполагает соблюдение ряда условий. Из них хочется выделить следующие: вовлечение каждого учащегося в активный познавательный процесс; совместная работа в технологии «сотрудничества» (обучение в малых группах);

При использовании исключительно традиционных педагогических технологий добиться желаемых результатов не представляется возможным. С нашей точки зрения, среди разнообразных направлений современных педагогических технологий, в последнее время все больший и больший интерес вызывает технология интерактивного обучения.

В математике организация интерактивного обучения имеет ряд особенностей и свою специфику.

Прежде всего, для того, чтобы было возможно организовать обсуждение между учащимися, учащиеся должны обладать базовым уровнем знаний и набором умений. Это и определяет первую особенность интерактивного обучения математике: чтобы поддерживать беседу два ученика между собой должны обладать определенным уровнем знаний и уровнем логического мышления. Поэтому, по всей видимости, нельзя отказаться от применения элементов традиционного обучения. Именно с этим связано то, что в реальной педагогической практике активные и интерактивные методы приходится применять в сочетании с традиционными методами [2].

Тема: «Преобразования плоскости» входит программу обучения средней школы. И при ее изучении, конечно, в первую очередь следует ориентироваться на требования к образовательным результатам, которые предъявляются в типовой учебной программе по предмету «Геометрия» для 7-9 классов уровня основного среднего образования.

С другой стороны в математических и нематематических классах педагог может добиться различной глубины изучения материала. Например, при проведении заключительного урока по теме «Движения плоскости» в гуманитарных и химико-биологических классах вряд ли имеет смысл решать сложные задачи на применение преобразований плоскости.

В связи с этим в данной статье предлагаются уроки на закрепление темы «Движения плоскости» двух разных уровней. Каждый педагог может решить сам, какой урок провести в определенном классе.

Урок 1

Тема. Использование движения плоскости при составлении орнамента.

Цель: продемонстрировать применение движений плоскости в образовательных целях, совмещение геометрических знаний и художественных ценностей.

Структура урока.

1. Организационный момент
2. Ознакомление с приемами составления орнамента
3. Составление орнамента (работа в группах)
4. Представление орнамента

Ход урока

I Организационный момент

Педагог приветствует учащихся, озвучивает цель и задачи предстоящего урока, создает положительный эмоциональный настрой.

II Ознакомление с орнаментом

В повседневной жизни вы часто сталкиваетесь с понятием орнамент или узор. Вы встречаете орнаменты на коврах, на одежде, в искусстве и в предметах быта. Но как получают эти разнообразные и причудливые узоры? Давайте в этом разберемся.

На интерактивной доске учителем выводится орнамент (рисунок 1).



Рисунок 1. Орнамент и его основной элемент

«Выделите основные или основной, повторяющийся элемент орнамента», – педагог приглашает к доске желающего ученика, и тот с помощью указки или ручки обводит основной на его взгляд элемент. Затем педагог обсуждает с учащимися, каким образом все остальные элементы получены из основного.

Например, этот элемент можно отразить своей симметрией направо и получить верхнюю часть орнамента. А затем всю верхнюю часть орнамента отразить симметрично вниз.

Также можно разобрать еще некоторые приемы составления орнаментов (рисунок 2).



Рисунок 2. Параллельный перенос в орнаменте

Педагог также может вызвать желающего показать основной элемент орнамента. Учащийся должен подметить, что данный орнамент составлен с помощью параллельного переноса.

Имеет смысл вызвать еще нескольких учеников, для того чтобы они показали другой повторяющийся элемент орнамента, а затем еще раз произвести обсуждение.

Завершающим этапом изучения приемов составления орнаментов может служить работа со сложным орнаментом, например, национальным ковром. Учащиеся также должны будут выделить основной и повторяющийся элемент, объяснить как получены другие.

III Составление орнамента

Инструкция к выполнению задания. Класс разбивается на группы по 4-5 человек. Формировать группу из большого количества человек не целесообразно, так как не все члены группы будут обеспечены работой, и как следствие, взаимодействия между членами группы не будет. Каждой группе раздается заранее вырезанные заготовки орнамента, ватман (лист А3), клей, цветная бумага, ножницы, карандаши и маркеры. На выполнение работы отводится 25 минут.

На свое усмотрение группа может использовать все элементы или же выбрать определенные.

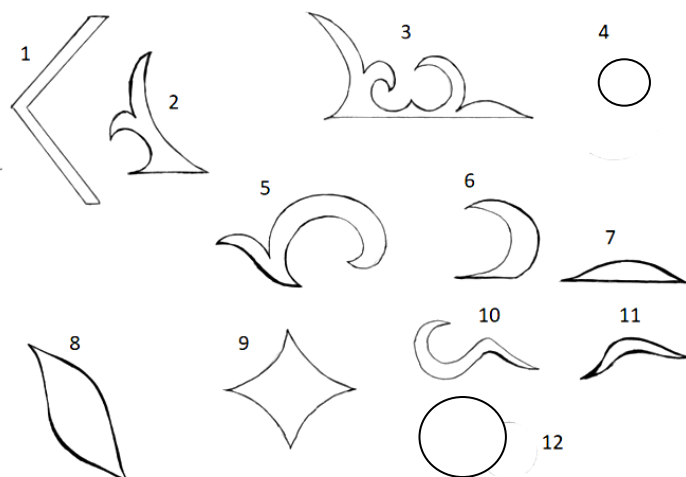


Рисунок 3. Набор элементов для составления орнамента

III Представление орнамента

По завершению работы каждая группа представляет получившийся орнамент у доски, объясняет, с помощью каких преобразований он был составлен. Пример ответа: «К фигуре 1 применялось следующее преобразование и сколько раз».

Урок 2

Тема. Применение движения плоскости к решению задач

Цель: повторить знания по теме «Движения плоскости»

Структура урока.

1. Организационный момент
2. Актуализация знаний
3. Применение движения плоскости к решению задач (работа в группах)
4. Подведение итогов урока

Ход урока

I Организационный момент

Педагог приветствует учащихся, озвучивает цель и задачи предстоящего урока, создает положительный эмоциональный настрой.

II Актуализация знаний

В качестве актуализации знаний учащимся можно предложить следующую работу. Класс разбивается на три группы. Каждая группа получает задание. Педагог заранее озвучивает, что ответить на вопросы карточки может попросить любого члена группы – это обеспечит вовлеченность каждого участника группы в процесс решения.

Карточка № 1

1. Для того чтобы четырехугольник был ... необходимо и достаточно, чтобы он имел центр симметрии. Вместо многоточия поставьте вид четырехугольника. Свой ответ обоснуйте.
2. Каким движением квадрат переводится сам в себя? Укажите количество осей симметрий квадрата.
3. Будет ли фигура, являющаяся объединением полосы и прямой, не принадлежащей ей, иметь центр симметрии?

Карточка № 2

1. Для того чтобы четырехугольник был ... необходимо и достаточно, чтобы он имел центр симметрии. Вместо многоточия поставьте вид четырехугольника. Свой ответ обоснуйте.
2. Каким движением ромб переводится сам в себя? Укажите количество осей симметрий ромба.
3. При каком условии можно отобразить окружность на окружность параллельным переносом?

Карточка № 3

1. Для того чтобы четырехугольник был ... необходимо и достаточно, чтобы он имел центр симметрии. Вместо многоточия поставьте вид четырехугольника. Свой ответ обоснуйте.

2. Сколько существует поворотов, отображающих квадрат на себя? Укажите центр этих поворотов.

3. Каким движением ромб переводится сам в себя? Укажите количество осей симметрий ромба.

Данные задачи [3] особенно интересны тем, что, например, задание 1 в каждой карточке развивает критическое мышление, так как учащиеся сначала рассуждают относительно того, где вообще может находиться центр симметрии у четырехугольника (в вершине, на стороне, на диагонали) и затем приходят к выводу, что исходя из условия центр расположен на середине диагонали, а значит это параллелограмм.

III Решение задач

Основная часть урока посвящена решению задач.

Для решения задач класс разбивается на четыре группы по четыре-пять человек. Формируется команда экспертов из учеников класса. По итогу работы эксперты будут оценивать правильность найденного решения. К каждому решению группа экспертов должна задать не менее двух вопросов. Каждой группе раздается карточка с заданием.

Карточка № 1

Четырехугольник $ABCD$ – ромб, у которого $\angle BDA = 60^\circ$. На сторонах AB и BC отмечены соответственно точки M и N , так что $AM = BN$. Докажите, что треугольник MDN – равносторонний.

Карточка № 2

Докажите, что прямая, содержащая середины двух параллельных хорд окружности, проходит через ее центр.

Карточка № 3

Докажите, что всякая трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной.

Карточка № 4

Две прямые, содержащие точку пересечения диагоналей параллелограмма, пересекают его стороны соответственно в точках M и L , N и K . Докажите, что четырехугольник $MNLK$ – параллелограмм.

Когда задачи решены, от каждой группы педагог выбирает учащегося, который будет рассказывать и защищать решение своей задачи. Группа экспертов производит оценку правильного решения и задает вопросы по каждому решению.

IV Подведение итогов урока.

В качестве итога урока педагог может предложить учащимся порефлексировать и оценить свою работу на данном уроке.

Список используемых источников

1. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: Учебное пособие для студ. пед. вузов и системы повыш. квалиф. пед. кадров / Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина, М. В. Моисеева, А. Е. Петров; Под ред. Е. С. Полат. — М.: Издательский центр «Академия», 2002. — 272 с.
2. Саранцев Г.И. Сборник задач на геометрические преобразования: пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1975. — 112 с.
3. Соломахо П.Э. Общая и профессиональная педагогика. — М.: Просвещение, 2002 — 101 с.

УДК 372.851(075.8)

ИННОВАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ЭКОНОМЕТРИКА»

Рахимжанова С. К.

В условиях современной рыночной экономики Казахстана использование экономико-математических и эконометрических методов при решении социально-экономических вопросов, знание общих положений мировой экономики, общая экономико-математическая культура являются неотъемлемым компонентом профессиональной компетентности специалиста математика. Существующая кредитная технология обучения направлена на повышение уровня самообразования и творческого освоения знаний на основе индивидуализации подготовки студентов. В связи с этим, целью современного преподавателя вуза является формирование нового типа специалиста, который умел бы самостоятельно добывать, обрабатывать, анализировать необходимую информацию и эффективно использовать ее в нужный момент.

Этой задаче может способствовать педагогическая технология, которая как направление в педагогике возникла в 60-е годы XX века в США, Англии и получила распространение во многих странах мира. Авторами педагогических технологий являются Д. Кэррол, Б. Блум, В. Коскарелли и другие. Весомый вклад в развитие педагогических технологий внес известный российский ученый-методист В.М. Монахов. В Казахстане этими вопросами занимались Кабдыкаиров К.К., Исин М.Е., Нуртаева Г.К. и др.

Методология исследования основана на методологической технологии В.М. Монахова [4] и опирается в большой степени на статью М.Е.Исина [2].

Рассматриваемая В.М. Монаховым информационная модель учебного процесса, является необходимым условием ее технологизации. Основным объектом технологизации учебного процесса выбрана учебная тема, в новом канонизированном понимании ее (границы учебной темы от 6-8 уроков до 22-24 уроков). Для вузовской системы образования ее верхняя граница, естественно, должна быть меньше. Для модульной системы образования учебная тема может быть выбрана в пределах одного модуля.

Следующие карты являются главными объектами проектирования учебного процесса в педагогической технологии В.М. Монахова:

- 1) технологическая карта (ТК);
- 2) информационная карта развития обучающегося (ИКРО);
- 3) информационная карта занятия (ИКЗ).

На данном этапе исследования рассмотрены технологические карты (ТК). Дадим характеристику этому объекту.

Технологическая карта - это "руководство" проекта учебного процесса по теме. В педагогической технологии В.М. Монахова информационная модель учебного процесса содержит пять основных параметров, непосредственно связанных между собой: целеполагание (система микроцелей), диагностика, дозирование самостоятельной деятельности обучающихся, логическая структура и коррекция.

Если говорить о взаимосвязи компонентов:

- содержание микроцели определяет содержание диагностики;
- содержание диагностики определяет содержание, объем и сложность компонента дозирования самостоятельной работы обучающегося;
- содержание дозирования проверяется как достаточное или недостаточное при проведении диагностики;
- логическая структура - это органичное и динамичное единство содержательного, процессуального и мотивационного аспектов в проекте учебного процесса;
- компонент коррекции - это фактическая программа деятельности преподавателя с обучающимися, не прошедшими диагностику.

Остановимся подробнее на компонентах технологической карты.

1. Целеполагание.

В традиционной методике проблеме целей и диагностики их достижений уделяется мало внимания и их задание не отличается четкостью. В технологии же целеполагание является главным компонентом.

Целеполагание - это система микроцелей, которые преподаватель определяет сам, на основе анализа рабочей (модульной) учебной программы (силлабуса), ориентируясь на требования образовательного стандарта, опираясь на личный методический опыт.

Число микроцелей учебной темы обычно от 2 до 5 в зависимости от ее традиционного объема.

Цели формулируются с использованием слов: "знать", "уметь", "иметь представление" и т.п.

Четкая и ясная формулировка микроцелей определяется опытом и методическим мастерством преподавателя.

Микроцель, согласно технологии, должна быть диагностируема, т.е. перед преподавателем стоит задача определения механизма установления факта достижения обучающимся этой микроцели.

Именно здесь проявляется личностно-ориентированная система обучения:

- **преподаватель** "видит" проект будущего учебного процесса в виде системы микроцелей, так выстраивается начало нового методического мышления;

- **перед студентом** выстраивается четкая система требований к его знаниям и умениям.

Построение микроцелей (целеполагание) в технологии являются основополагающими: Именно микроцели определяют содержание остальных компонентов технологии и их логической структуры

2. Конечный результат технологии обучения задается в виде специально разработанной преподавателем самостоятельной проверочной работы.

Диагностика - это система проверочных самостоятельных работ (СР), составляемая преподавателем, для определения реализации микроцелей (достигнута или не достигнута каждая микроцель).

Технологическая сущность компонента "Диагностика" В.М. Монаховым определяется в виде следующих правил.

Правило 1. СР состоит из двух типов заданий: задания на уровне образовательного стандарта (программы), задания на повышенном уровне.

Правило 2. Стандартная СР имеет четыре задания: два - на уровне стандарта, два - на повышенном уровне.

Правило 3. Общий вид СР:

- 1) задание на уровне требований образовательного стандарта;
- 2) задание на уровне требований образовательного стандарта;
- 3) задание на уровне требований к оценке "хорошо";
- 4) задание на уровне требований к оценке "отлично".

Правило 4. Два первых задания должны быть одинаковы по трудности, просты и абсолютно понятны учащимся.

Правило 5. Каждый обучающийся обязан достигнуть уровня стандарта, а далее он имеет право остановиться на этом уровне, или двигаться выше. При этом студент, независимо от своих предыдущих успехов, выполняет задания в указанной последовательности.

Правило 6. Задание №3 на "хорошо" (в модульно-рейтинговой системе при сто балльной системе оценки 75-89 баллов) должно быть более трудным, чем задание №1, №2. Повышение его трудности должно быть связано с содержанием диагностируемой микроцели.

Правило 7. Задание №4 на "отлично" (90-100 баллов) должно быть труднее, чем задание №3.

В.М. Монахов предлагает предельно простую, не допускающую неоднозначности и двусмысленности, систему контроля и оценок успехов учащихся.

Система оценок успехов учащихся:

- ошибки в обоих заданиях №1 и №2 - ученик попадает в группу коррекции;

- выполнено задание №1 или №2 - дается дозированный объем заданий в блоке "Дозирование домашних заданий";

- выполнены задания №1 и №2 - ученик получает "зачет" (т.е. "удовлетворительно" - что означает: "ученик удовлетворяет требованиям государственного стандарта").

Такая система оценок знаний учащихся обладает рядом преимуществ перед традиционной:

1. Равноправное положение преподавателя и студента (задания СРО выдаются в начале года в УМКд).

2. Там же прописаны требования к их знаниям и умениям.

3. При данной технологии определены: нормы нагрузки, нормы требований, нормы оценок.

4. В технологии В.М. Монахова преподаватель предоставляет студенту право выбора "оценки", который в данный момент соответствует ценностным установкам, тем самым проявляя уважение к личности обучающегося.

3. Дозирование домашнего задания (внеаудиторная самостоятельная деятельность обучающихся).

Практическая цель для этого блока - гарантированно подготовить студента к диагностике.

Нравственная цель - студент сам вправе выбрать будущую оценку. И еще одна **важная цель - преодоление перегрузки**.

«Разумная» норма (по объему, по трудности, по сложности) домашних заданий – определяется преподавателем исходя из СМК и личного опыта.

4. Логическая структура учебного процесса - это стратегия учебного процесса.

Логическая структура проекта представляется цепочкой занятий (лекций, практических или лабораторных занятий), которые разбиваются на группы по числу микроцелей. Заканчивается каждая цепочка выполнением самостоятельной работы.

5. Коррекция рассчитана на обучающихся, которые не получили положительную оценку на диагностике, т.е., это своего рода программа вывода таких студентов на уровень стандарта.

В этом блоке автор технологии рекомендует в явном виде выделять три рубрики.

Первая - возможные **затруднения** при освоении учебного материала, относящегося к данной микроцели.

Вторая - наиболее **типичные ошибки**, которые допускают обучающиеся при прохождении этой темы.

Третья - **система мер** педагогического и методического характера с отстающими студентами.

Таким образом, технологическая карта – есть гарантия того, что все студенты достигнут уровня стандарта, а более способные усвоят материал на более высоком уровне.

Согласно данной технологии обучения содержание предмета «Эконометрика» разделено на несколько разделов - модулей: парный регрессионный анализ, множественный регрессионный анализ, динамические ряды и системы одновременных уравнений. Для каждого раздела предполагается разработка технологических карт гарантированного обучения. При этом в процессе их применения предполагается активное использование информационно-коммуникационных технологий, в частности, для выполнения заданий СРО.

В данной статье представлена разработанная технологическая карта гарантированного обучения дисциплине «Эконометрика» (модуль 3 «Динамические ряды») студентов специальности «5В060100-Математика».

Представим, прежде всего, тематический план дисциплины модуля 3.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ ПО МОДУЛЮ 3

<i>Модуль 3. Временные (динамические) ряды</i>
--

<i>Программный материал</i>	<i>Количество часов (лек+пр+СРО)</i>
2.1 Временные ряды. Общие сведения о рядах и задачах их анализа. Стационарные временные ряды и их характеристики. Автокорреляционная функция. Аналитическое сглаживание временного ряда.	2+1+6
2.2 Прогнозирование временных рядов. Прогнозирование на основе моделей временных рядов. Авторегрессионные модели и модели скользящей средней.	2+1+6
2.3 Обобщенная линейная модель. Обобщенная линейная модель множественной регрессии. Обобщенный метод наименьших квадратов.	2+1+6
2.4 Гетероскедастичность. Гетероскедастичность пространственной выборки. Тесты на гетероскедастичность. Устранение гетероскедастичности.	2+1+6
2.5 Автокорреляция. Автокорреляция остатков временного ряда. Положительная и отрицательная автокорреляция. Авторегрессия первого порядка. Статистика Дарбина-Уотсона.	2+1+6
2.6 Устранение автокорреляции и авторегрессии. Тесты на наличие автокорреляции. Устранение автокорреляции. Идентификация временного ряда. Авторегрессионная модель первого порядка. Обобщенный метод наименьших квадратов.	2+1+6
2.7 Регрессионные динамические модели. Стохастические регрессоры. Метод инструментальных переменных. Оценивание моделей с распределенными лагами. Обычный и нелинейный методы наименьших квадратов. Другие виды регрессионных динамических моделей и методы их решений.	2+1+6
Итого:	14+7+42=63

По данной теме составлена технологическая карта.

Таблица 1. Технологическая карта темы

Целеполагание	Диагностика	Коррекция
В1. 1. Умение вычислять оценки числовых характеристик строго стационарного временного ряда $x(t)$, используя соответствующие формулы: а) выборочного среднего, б) выборочной дисперсии, в) выборочной ковариации, г) выборочной автокорреляции, д) выборочной частной автокорреляции первого порядка. 2. Умение проводить проверку гипотезы о стационарности временного ряда с помощью критерия, основанного на медиане. 3. Умение проводить провер-	D1. 1. Пользуясь статистическими интернет сайтами, рассмотрите ряд динамики какого-либо экономического процесса, протяженностью не менее 20 периодов, вычислите оценки числовых характеристик данного временного ряда $x(t)$, используя соответствующие формулы. 2. С помощью критерия, основанного на медиане, проверьте гипотезу о стационарности временного ряда. 3. С помощью критерия, основанного на критерии восходящих и нисходящих серий, проверьте гипотезу о неизменности среднего значения временного ряда. 4. Опишите алгоритм использования ППП Excel	K1. 1. Часто путают понятия выборочной автокорреляции и выборочной частной автокорреляции первого порядка. 2. Проблемы при расчете медиан и записи их в нужном порядке. 2. Проблемы при работе с интернет сайтами.

ку гипотезы о неизменности среднего значения временно-го ряда с помощью критерия, основанного на критерии восходящих и нисходящих серий. 4. Умение пользоваться интернет сайтами 5. Умение использовать программные продукты для решения задач эконометрики		
B2. 1. Умение рассчитать коэффициенты α_0 и α_1 линейного аппроксимирующего многочлена неслучайной составляющей методом МНК. 2. Умение с помощью метода скользящей средней проводить сглаживание временного ряда. 3. Умение оценить качество полученной модели с помощью критерия Фишера или критерия Стьюдента. 4. Умение использовать полученную модель для составления экономического прогноза. 5. Умение пользоваться интернет сайтами. 6. Умение пользоваться программными продуктами.	D2. 1. Для имеющегося ряда динамики рассчитайте коэффициенты α_0 и α_1 линейного аппроксимирующего многочлена неслучайной составляющей методом МНК. 2. Проведите сглаживание временного ряда с помощью скользящего среднего для $m=3$. постройте графики. 3. Проведите оценку качества модели с помощью критерия Фишера или критерия Стьюдента. 4. Получите точечный и интервальный прогнозы на 2017 год и сравните их с реальными данными. Сделайте вывод. 5. Опишите алгоритм работы с используемыми пакетами программ.	K2. 1. Проблемы вызывает построение интервальных оценок и умение сделать вывод по полученным результатам. 2. Студенты пользуются в основном ППП Excel, не используя другие пакеты программ, например, Statistika, Matlab или Mathematika.
V3. 1. Умение выводить формулу для конечной разности $\Delta^n x(t)$ с использованием итерационной формулы для подбора степени полинома тренда. 2. Умение рассчитывать параметры каждой формы тренда. 3. Умение оценивать качество модели. 4. Умение строить точечный прогноз для выбранной формы тренда. 5. Умение строить интервальный прогноз для выбранной формы тренда, для заданного уровня значимости.	D3. 1. Проведите расчет параметров трендов разной формы. 2. Оцените качество каждого тренда через среднюю ошибку аппроксимации, линейный коэффициент автокорреляции отклонений. 3. Оцените статистическую значимость трендов с помощью критерия Фишера, значимость параметров тренда – с помощью критерия Стьюдента. 4. Выберите лучшую форму тренда и выполните для нее точечный прогноз на 2017 год. 5. Оцените ошибку прогноза	K3. 1. Проблемы вызывает построение интервальных оценок и умение сделать вывод по полученным результатам 2. Проблемы вызывает построение нескольких линий на одном графике 3. Вызывает проблемы расчет конечной разности выше четвертого порядка, расчет линейного коэффициента автокорреляции, линеаризация нелинейных моделей тренда, оценка ошибки прогноза. 4. Студенты пользуются в основном ППП Excel, не используя другие пакеты программ, например, Statistika,

	и постройте доверительный интервал прогноза для уровня значимости 0,05.	Matlab или Mathematika
--	---	------------------------

Составлена таблица контроля .

Таблица 2. Контроль знаний

Удовлетворительно (стандарт) 50-74 баллов	Хорошо 79-89 баллов	Отлично 90-100 баллов
B1: [1]: 1, 2.	[1]: 1,2,3,4.	[1]: 1,2,3,4,5.
B2: [2]: 1, 2.	[2]: 1,2,3,5.	[2]: 1,2,3,4.
B3: [3]: 1,2.	[3]: 1,2,3,4.	[3]: 1,2,3,4,5.

Список использованных источников

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. «Прикладная статистика и основы эконометрики» М.:ЮНИТИ, 1998.
2. Исин М.Е. Технология гарантированного обучения курсу экономико-математического моделирования. //Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. 2015. №3 (51). С. 122-133.
3. Кабдыкаиров К.К. Педагогическая технология обучения – средство совершенствования стандарта знаний. 2000. Алматы: Издательство КазНУ им. Аль-Фараби, 2000. 56 с.
4. Монахов В.М. Методология педагогической технологии академика В.М. Монахова. М.: Центр обучения педагогической технологии. 1997. 43с.
5. Монахов В.М. Целеполагание. Москва-Новокузнецк: Новокузнецкий ИПК, 1997. 73с.
6. Монахов В.М. Диагностика. Москва-Новокузнецк: Новокузнецкий ИПК, 1997. 75с.
7. Монахов В.М. Коррекция. Москва-Новокузнецк: Новокузнецкий ИПК. 1997. 70с.
8. Эконометрика / Под ред. И.И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2001.
9. Практикум по эконометрике / Под ред. И.И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2005.

**ҮШІНШІ РЕТТІ АЙНЫМАЛЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ
ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУДІҢ ҚАЙСЫБІР ЖОЛДАРЫ**

Сағындықов Б.Ж.

Сәтбаев университеті, Алматы қаласы, Қазақстан

E-mail: bimurat55@gmail.com

$$a_0(x)y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0 \quad (1)$$

біртекті теңдеуін қарастырайық. x өсінің қайсыбір $< a, b >$ аралығында $a_0(x) \neq 0$ дейік.

Сонда

$$y'''(x) + p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0 \quad (2)$$

теңдеуі алынады. Мұнда $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$, $q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$, $r(x) = \frac{a_3(x)}{a_0(x)}$.

I. (1) теңдеуді тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеуге келтірудің қайсыбір тәсілін қарастырайық. Ол үшін ізделініп отырған шешімді

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) \quad (3)$$

түрінде іздейік. Бұл жерде $u(x)$ - ізделініп отырған жаңа функция, ал $v(x)$ функциясын (1) теңдеуді тұрақты коэффициентті теңдеуге келтіретін шартты қанағаттандыратындай етіп іріктеп таңдап алады.

Әрі қарай ізделініп отырған шешімнің сәйкес туындыларын тауып, (1) теңдеуге қоялық:

$$y'(x) = u'v + uv', \quad y''(x) = u''v + 2u'v' + uv'', \quad y'''(x) = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''. \quad (4)$$

Сонда

$$u''' + \left(p(x) + \frac{3v'}{v} \right) u'' + \left(q(x) + 2p(x) \frac{v'}{v} + \frac{3v''}{v} \right) u' + \left(r(x) + q(x) \frac{v'}{v} + p(x) \frac{v''}{v} + \frac{v'''}{v} \right) u = 0 \quad (4)$$

теңдеуі алынады.

(4) теңдеу біртекті тұрақты коэффициентті үшінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеуге көшу үшін

$$p(x) + \frac{3v'(x)}{v(x)} = C_1, \quad (5)$$

$$q(x) + 2p(x) \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{3v''(x)}{v(x)} = C_2, \quad (6)$$

$$r(x) + q(x) \frac{v'(x)}{v(x)} + p(x) \frac{v''(x)}{v(x)} + \frac{v'''}{v(x)} = C_3 \quad (7)$$

шарттарының орындалуы қажетті және жеткілікті. Мұнда C_1 , C_2 және C_3 – тұрақтылар.

Сонда (5) теңдеудің жалпы шешімі

$$v(x) = \exp \left(\frac{a}{3} x - \frac{1}{3} \int p(x) dx \right) \quad (8)$$

формуласы бойынша табылады.

Бұл жерде $v(x)$ функциясы (4) теңдеуден $u''' + au'' + bu' + cu = 0$ түріндегі тұрақты коэффициентті теңдеуге көшудің қажетті шартын көрсетеді. Ал (7) және (8) формулалар жоғарыда көрсетілген тәсіл үшін келтірудің жеткілікті шарттарын көрсетеді.

Жалпылықты бұзбай кез келген a тұрақтысын нөлге тең деп алсақ, онда жоғарыдағы шарттар төмендегі түрде жазылады:

$$q(x) - \frac{1}{3} p^2(x) - p'(x) = \text{const}, \quad (10)$$

$$r(x) - \frac{1}{3} q(x) p(x) + \frac{2}{27} p^3(x) - \frac{1}{3} p''(x) = \text{const}.$$

Мысал ретінде [2] алынған біртекті айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеуді интегралдайық

$$y'''(x) + 3axy''(x) + 3a^2x^2y'(x) + (a^3x^3 + b)y(x) = 0, \quad (11)$$

мұнда a, b – тұрақтылар.

Шешуі. (10) шарттардың орындалуын тексерейік:

$$q(x) - \frac{1}{3} p^2(x) - p'(x) = 3a^2x^2 - \frac{1}{3} 9a^2x^2 - 3a \equiv \text{const},$$

$$r(x) - \frac{1}{3} q(x) p(x) + \frac{2}{27} p^3(x) - \frac{1}{3} p''(x) = a^3x^3 + b - \frac{1}{3} 9a^3x^3 + \frac{2}{27} 27a^3x^3 = b \equiv \text{const}.$$

Одан әрі (8) формула бойынша $v(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)$ функциясын табамыз. Демек берілген теңдеу

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = u(x) \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)$$

алмастыруының көмегімен $u'''(x) - 3au'(x) + bu(x) = 0$ түріндегі біртекті тұрақты коэффициентті үшінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеуге келтіріледі. Соңғы теңдеудің жалпы шешімін табу қиындық туғызбайды.

II. Айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулерді барлығына ортақ квадратурада интегралдайтын тәсіл жоқ. Сондықтан бұл мақалада (1) теңдеудің коэффициенттерін зерттей отыра оның бір дербес шешімін табу жолын қарастырамыз. Ол үшін (1) теңдеудің коэффициенттерін келесі түрде топтастырайық:

$$(a_0 y'')' + (a_1 - a_0') y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

немесе

$$(a_0 y'')' + [(a_1 - a_0') y'] - (a_1' - a_0'' - a_2) y' - a_3 y = 0 \quad (12)$$

Теорема. Егер (12) теңдеудің, яғни бастапқы (1) теңдеудің коэффициенттерінің арасында

$$(a_1' - a_0'' - a_2)' - \left(\frac{a_3'}{a_3} + \frac{a_1}{a_0} - \frac{a_0'}{a_0}\right)(a_1' - a_0'' - a_2) = a_3 \quad (13)$$

түріндегі теңдік орын алса, онда (1) теңдеудің бір дербес шешімі

$$y_1(x) = \exp\left(\int \frac{a_3}{a_1' - a_0'' - a_2} dx\right) \quad (14)$$

формуласы бойынша анықталады.

Келесі қадамда (14) шарт орындалатындай айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулердің класын құрайық:

1) $a_1(x) = a_0'(x)$ делік, сонда (13) теңдіктен $a_2(x)$ коэффициенті үшін

$$a_2'(x) - \frac{a_3'(x)}{a_3(x)} a_2(x) = -a_3(x)$$

түріндегі сызықты дифференциалдық теңдеу алынады және оның жалпы шешімі $a_2(x) = a_3(x)(C - x)$ теңдігі арқылы табылады. Демек

$$\begin{aligned} x^3 y''' + 3x^2 y'' - x \sin x \cdot y' + \sin x \cdot y &= 0, \\ \sin x \cdot y''' + \cos x \cdot y'' - x e^x y' + e^x y &= 0 \end{aligned}$$

теңдеулеріне ортақ бір дербес шешім $y_1(x) = x$ функциясы болады. Шын мәнісінде, егер (14) шарт орындалса, онда (1) теңдеудің бір дербес шешімі $a_0(x)$ және $a_1(x)$ коэффициенттеріне тәуелсіз.

2) $a_1(x) \neq a_0'(x)$ делік, сонда (13) сызықты теңдеудің жалпы шешімі келесі түрде жазылады

$$a_1' - a_0'' - a_2 = \frac{a_3}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \left(C + \int a_0 \cdot e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} dx \right). \quad (15)$$

Қорыта айтқанда, егер (13) теңдеудің коэффициенттерінің арасында (15) теңдік орын алса, онда оның бір дербес шешімі (14) формула бойынша анықталады.

Мысалы, $xy''' + x^2y'' + (2x + \sin x)y' + x \sin x \cdot y = 0$ теңдеуінің бір дербес шешімі (14)

формула бойынша табылған $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциясы болады.

Тексеру: $y'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $y''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1)$, $y'''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(-x^3 + 3x)$. Сонда

$$xy''' + x^2y'' + (2x + \sin x)y' + x \sin x \cdot y = e^{-\frac{x^2}{2}}(-x^4 + 3x^2 + x^4 - x^2 - 2x^2 - x \sin x + x \sin x) \equiv 0.$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. Изд. 2-е, испр. М.: Ком Книга, 2007. - 240 с.
2. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. - 576 с.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРОМБООБРАЗОВАНИЯ В КРОВИ

Сарсенова Б.Е., Маусумбекова С.Д.

Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
sarsenova.balzhan@gmail.com

Гемостаз – естественный процесс прекращения чрезмерного кровотечения в случае травмы. Тромбоз часто связан с патологическими состояниями и является образованием сгустков крови (тромбов) внутри сосудистой камеры из-за повреждения эндотелия или других причин, препятствующих кровообращению. Чтобы выявить причины таких заболеваний, нам необходимо знать взаимосвязь тромбообразования и разрыва с его динамическими механическими свойствами. Это требует понимания молекулярной основы и механизмов, которыми управляют механические свойства сгустка.

Тромбы гораздо чаще и легче образуются в венах, где ток крови медленнее, чем в артериях. Тромбообразованию способствует сердечная недостаточность, при которой ток крови замедлен. Однако только замедление крови не приводит к тромбозу сосудов. Так, в сосуде, с двух сторон перевязанном лигатурой, где кровоток прекращен, кровь остается жидкой. Следовательно, замедление тока крови не является причиной тромбообразования, не способствует ему.

Изменение состава крови, особенно повышение свертываемости ее, создает благоприятные условия для тромбообразования. Это бывает при ряде заболеваний, нарушениях обмена веществ, при введении в кровь гипертонических растворов хлористого натрия, экстрактов из органов и т.д.

Изучение тромбоза имеет решающее значение для понимания и развития новых методов лечения таких заболеваний, как тромбоз глубоких вен, диабетические инсульты, легочная эмболия. Последние два десятилетия наблюдается рост исследований, связанных с образованием сгустка крови с использованием вычислительных инструментов и экспериментов [1,2]. Несмотря на этот рост, полный механизм формирования тромбов и гемостаза пока не известен. Вычислительные модели и методы, используемые в этих целях разнообразны в пространственно-временных масштабах, но нет единой модели, которая могла бы предсказать как физиологические, так и механические свойства сгустка крови.

Динамика кровотока в кровеносных сосудах с тромбами является одной из актуальных проблем гемодинамики. Различные методы экспериментов используются для прогнозирования возникновения стеноза в крови. Однако наиболее интересными являются математические методы для расчета параметров гемодинамики в области образования

тромбов [3-5]. Построение численных моделей является основным средством изучения реальных проблем гемодинамики, что связано со сложностью биологической системы, функционирование которой нелинейно зависит от большого числа факторов, тогда как аналитические методы решения имеют очень узкую область применения.

Способность обеспечить быструю локальную реакцию организма в ответ на местные нарушения нормальных условий потока является особенностью системы свертывания крови. В крови свертывание активируется факторами, которые высвобождаются в месте повреждения. Эти факторы вызывают каскад биохимических реакций, приводящих к появлению тромбина. Некоторые компоненты ингибирующей системы, такие как белок С, представляют собой ферменты, активация которого инициируется непосредственно тромбином.

На сегодняшний день были разработаны ряд математических моделей, которые описывают кинематику свертывания крови [5-9]. Математическая модель строится с учетом того факта, что динамика системы свертывания крови определяется двумя факторами: факторы коагуляции и факторы, препятствующие коагуляции.

Математическое моделирование позволило воспроизвести динамику роста тромба в сосуде и исследовать его поведение в различных условиях – например, при повреждении сосудистой стенки.

Физическая постановка задачи

Проблема рассматривается в двумерной постановке, кровяной поток считается несжимаемой жидкостью. В качестве участка сосуда принимается канал длиной L и высотой H , вся область D . Исходными является система уравнений Навье-Стокса, дополненная уравнением неразрывности. Расчетная область приведена на рис. 1, где показана атеросклеротическая бляшка размером D_0 (область стеноза). На отрезке $x_1 \leq x \leq x_2$ сделаем отрез, где будет формироваться тромб.

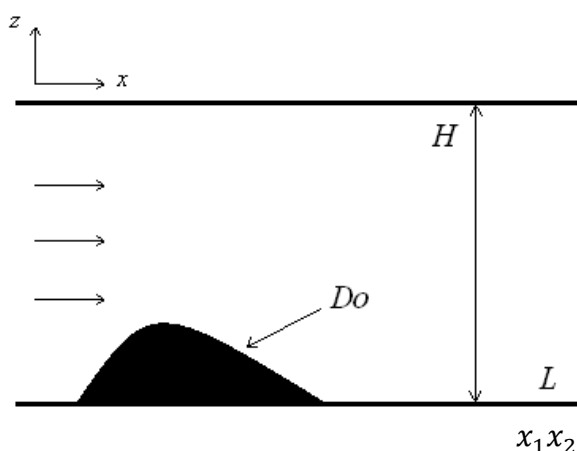


Рисунок 1. Расчетная область

Математическая модель

В этой модели свертывания крови кровь рассматривается как несжимаемая жидкость с постоянной вязкостью. Механизмы реакции, обеспечивающие производство антикоагулянтных факторов не изучено полностью, поэтому в этой статье мы ограничимся упрощенной математической моделью, описывающей кинетику производства и диффузии в пространстве и зависящей только от двух факторов: коэффициент свертывания тромбина и фактор свертывания крови [7]. Математическая модель сводится к двумерному нестационарному уравнению для течения вязкой несжимаемой жидкости, дополненной членами конвективного транспорта метаболитов.

Система исходных уравнений запишется в безразмерном виде:

$$\bullet \quad \operatorname{div} V = 0, \quad (1)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V = -\nabla p + \mu \Delta V, \quad (2)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = D_1 \Delta \theta - \operatorname{div}(V \theta) + \frac{\alpha \theta^2}{\theta + \theta_0} - \gamma \theta \phi - \chi_1 \theta, \quad (3)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = D_2 \Delta \phi - \operatorname{div}(V \phi) + \beta \theta \left(1 + \frac{\phi^2}{\phi_0^2}\right) - \chi_2 \phi, \quad (4)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = k \theta \quad (5)$$

где V – скорость потока крови, p – давление в сосуде, μ – динамическая вязкость, θ – концентрация активатора свертывания (тромбин), ϕ – концентрация ингибитора. Тромбин катализирует превращение предшественника фибрина – фибриногена в мономер фибрина, концентрация которого обозначается ψ . Здесь D_1, D_2 – коэффициенты диффузии, α, β, γ – кинетические параметры. Кинетический член $\frac{\alpha \theta^2}{\theta + \theta_0}$ описывает активационный автокатализ. Нелинейный член в (4) уравнении имитирует продукцию ингибитора. Кинетические члены $\chi_1 \theta, \chi_2 \phi$ описывают пассивные побеги метаболитов. Уравнение (5) показывает, что образуется фибрин главным образом из-за реакций тромбина.

Начальные и граничные условия

В качестве начальных данных задаются исходные поля скорости. Начальный профиль скорости задается следующим образом:

$$u(0, x, z) = u_0, \quad w(0, x, z) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq z \leq H.$$

Для метаболитов возьмем следующие начальные значения:

$$\psi(0, x, z) = 0, \quad \theta(0, x, z) = 0, \quad \phi(0, x, z) = 0$$

В области $x_1 \leq x \leq x_2$: $\theta(0, x, z) = 0, \quad \phi(0, x, z) = 1$.

Граничные условия

Во входном сечении рассматриваемой области, то есть при $x = 0$ значения скорости совпадают с начальными условиями:

$$u(t, 0, z) = u(0, 0, z), \quad w(t, 0, z) = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq H$$

На выходе, то есть при $x = L$ используются следующие условия:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = (u, w), \quad x = L.$$

На нижней и верхней границе рассматриваемой области, то есть при $z = 0$ и $z = H$ задаются условие прилипания или стенки:

$$u(t, x, 0) = 0, \quad w(t, x, 0) = 0, \quad z = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

Метод решения

Для численного решения сформулированной задачи применяется метод расщепления, описанный Белоцерковским. Здесь для аппроксимации конвективных членов использованы разности против потока, что приводит к повышению устойчивости расчетного алгоритма для более высоких чисел Рейнольдса и Пекле. Пусть в некоторый момент времени $t_n = n\Delta t$, (Δt –

шаг по времени, n – число шагов) известны поля скорости $V = (u, w)$, давления P . Тогда определение неизвестных функций в момент времени $t_{n+1} = (n + 1)\Delta t$ представляется в виде трехэтапной схемы расщепления.

На первом этапе определяются промежуточные значения скорости по уравнениям

$$\frac{\tilde{u}-u}{\Delta t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - S(u - u_0), \quad (6)$$

$$\frac{\tilde{w}-w}{\Delta t} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - S(w - w_0). \quad (7)$$

На втором этапе по вычисленным на первом этапе промежуточным значениям скорости рассчитывается поле давления по уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right). \quad (8)$$

На третьем этапе определяется окончательные (на временном слое $n + 1$) значения скорости по уравнениям

$$\frac{u-\tilde{u}}{\Delta t} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\frac{w-\tilde{w}}{\Delta t} = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (10)$$

Для решения уравнений, описывающих динамику распределения основных метаболитов системы свертывания крови, применялась неявная схема второго порядка аппроксимации по пространственным переменным.

После процедура обезразмеривания система (3) - (5) переписывается со следующим выбором характерных масштабов: концентрации θ_0 и ϕ_0 , как:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{Pe} \Delta \theta - \text{div}(\theta V) + \frac{1}{M} \left(\frac{\theta(\theta - \bar{\chi}_1)}{\theta + 1} - \bar{\gamma} \theta \phi \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{Pe} \Delta \theta - \text{div}(\phi V) + \frac{1}{M} (b\theta(1 - \varepsilon\phi)(1 + \phi^2)) - \chi_2 \phi. \quad (12)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = k\theta \quad (13)$$

$$zdeM = \frac{V}{\alpha_* L}, \quad Pe = \frac{LV}{D}, \quad \chi_1 = \alpha_* \bar{\chi}_1, \quad \chi_2 = \alpha_* \bar{\chi}_2, \quad b = \frac{\beta \theta_0}{\phi_0 \alpha_*}, \quad c = \frac{\phi_0}{\varepsilon}, \quad Re = \frac{LV}{\nu}.$$

Модель описывает образование в крови, вследствие химических реакций, ключевых регуляторов полимеризации фибрина – активатора свертывания (тромбина) и ингибитора (протеина С). Распределение обоих метаболитов по пространству управляет ростом тромба.

Для решения уравнения, описывающих динамику распределения основных метаболитов системы свертывания крови, применялась неявная схема второго порядка аппроксимации по пространственным переменным.

Результаты и их анализ

Динамика тромбообразования определяется взаимодействием активатора и ингибитора. Приведенные на рисунках результаты соответствуют относительно невысоким скоростям кровотока. Концентрационная волна активатора, имеющая в безконвективных

условиях скорость $V_* = \sqrt{D_1(\alpha \chi_1)}$ формирует полимеризирующий сгусток, который перекрывает кровоток, имеющий скорость V . Остановка кровотока в результате роста тромба возможна когда эти скорости соизмеримы. Противодействие течения автоволне свертывания может быть охарактеризована безразмерным параметром $Gu = V/V_* = V/\sqrt{D_1(\alpha \chi_1)}$.

На рисунке 2 приведены результаты расчетов при следующих параметрах: $Re=0.01$, $Pe=10$, $Gu=2.7$ в разные моменты времени.

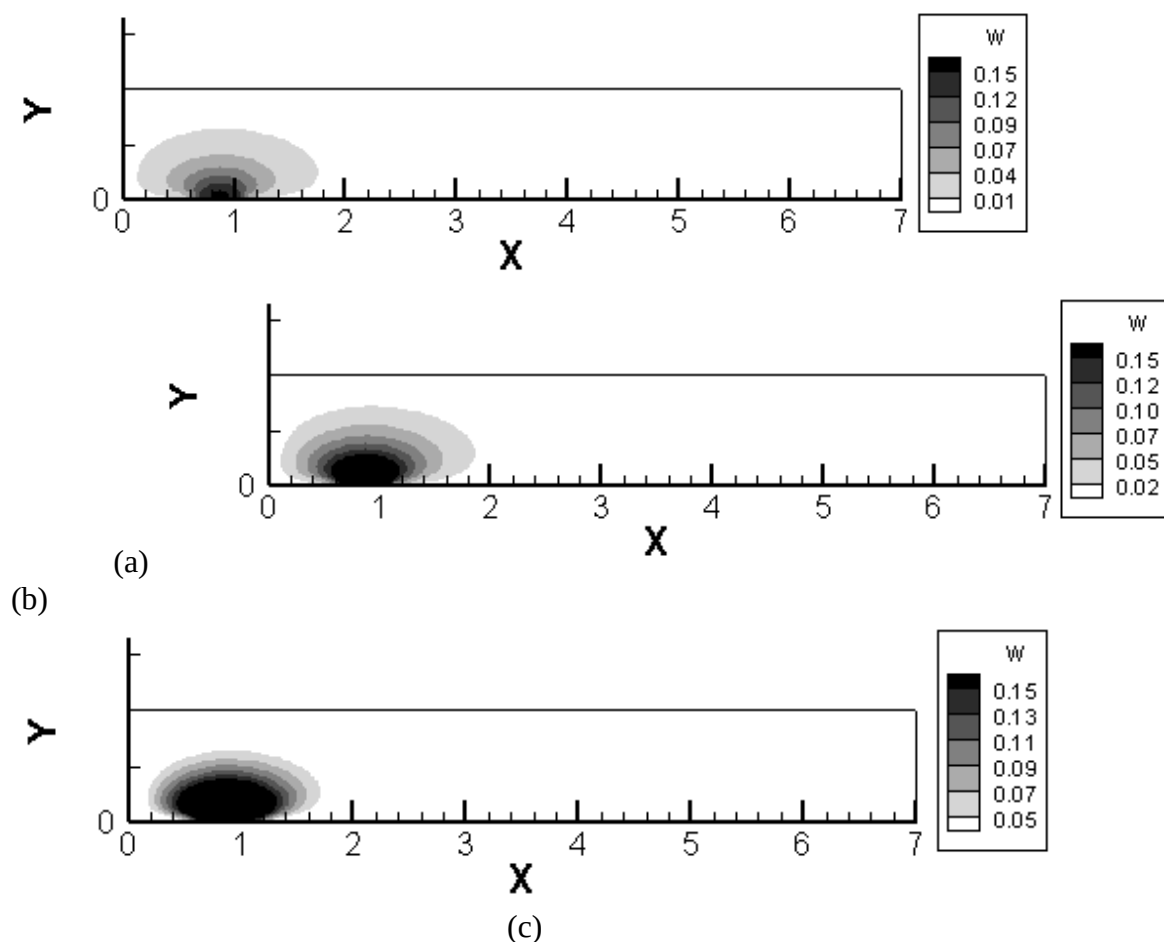


Рисунок 2 – динамика формирования тромба в моменты времени $t=100$ (a), $t=400$ (b), $t=500$ (c). Участок сосуда. Место повреждения сосудистой стенки отмечено черным цветом.

Видно, что свертывание за счет повышения концентрации активатора – тромбина сопровождается формированием полимерного сгустка – тромба, вытесняющего кровоток из области, прилегающей к месту первичного повреждения.

На рисунке 3 приведены результаты расчетов при следующих параметрах: $Re=2$, $Pe=24$, $Gu=2.7$ в разные моменты времени.

Увеличение значения числа Рейнольдса ведет к сносу тромба по направлению потока, тромб принимает несимметричную форму как это было в первом случае.

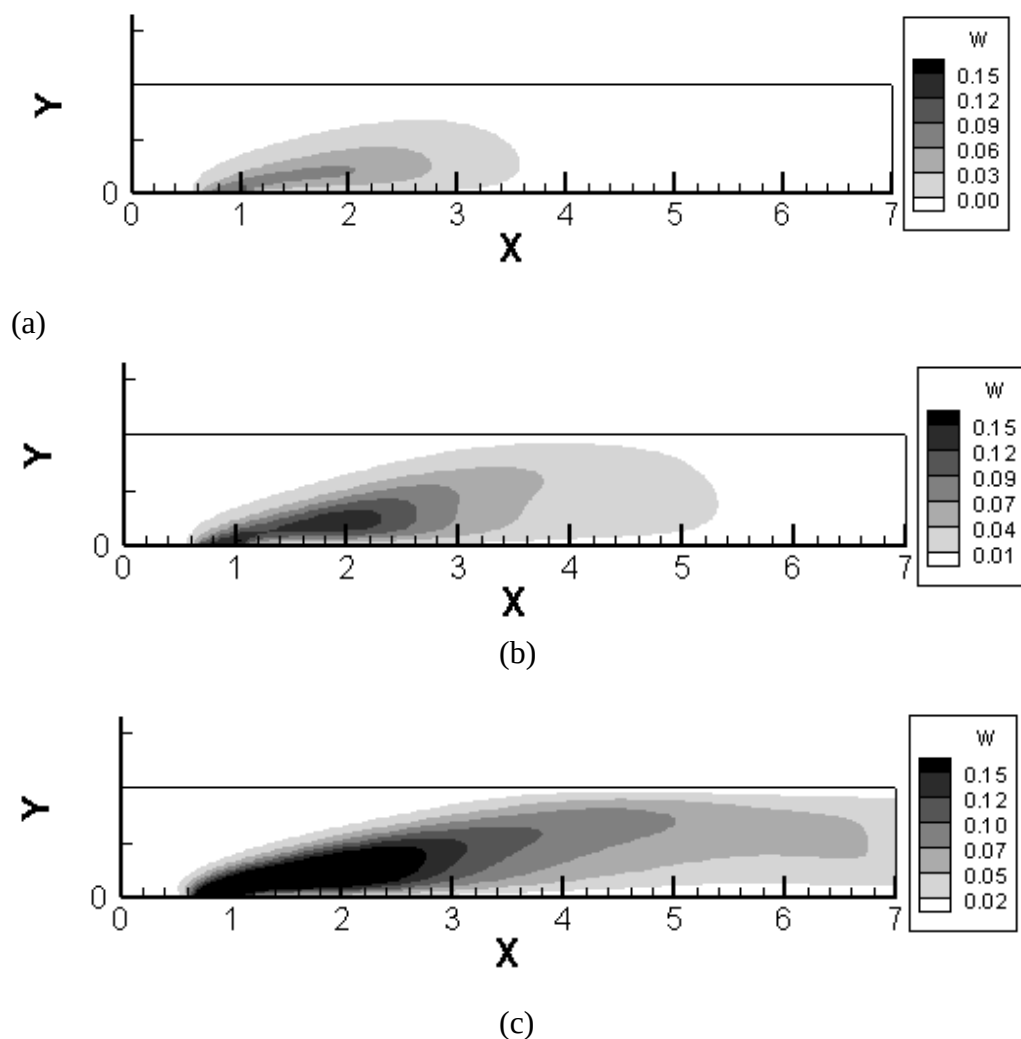


Рис 3 – динамика формирования тромба в моменты времени $t=100$ (a), $t=400$ (b), $t=500$ (c).

Размер области повреждения и интенсивность активации свертывания в этой области выступают в качестве параметров задачи. Локальная активация системы свертывания запускает процесс формирования первичного фибринового сгустка, его рост приводит к вытеснению течения из области тромба.

Остановка кровотока в результате роста тромба возможна, когда эти скорости соизмеримы. Противодействие течения автоволне свертывания может быть охарактеризована безразмерным параметром Gu . Были получены результаты экспериментов, где изменение числа Gu приводит к интенсивности конвективного переноса тромба. Волна противосвертывания останавливает дальнейший рост тромба, оттеснение кровотока происходит более существенно, дальнейшие численные эксперименты показали, что в этих условиях не происходит отрыва тромба (рис 3).

Заключение

Прогнозирование роста тромба в реальном времени и пространстве ранее не было сделано и обеспечивает интересный взгляд на динамику тромбоза. Кроме того, эта модель позволяет нам исследовать влияние тромбов на локальную жидкость динамики и других соседних тромбов.

На основе решения уравнений диффузионного типа продемонстрирована зависимость формы тромба от числа Рейнольдса.

Расчеты формирования тромбоцитарного тромба с учетом изменения формы сосуда показывают, что тромб активно утолщается с подветренной стороны поврежденного участка.

При росте тромбов в форме нитей необходимо использовать более сложные модели, включающие в себя решение уравнений Навье–Стокса в изменяющейся со временем области и различные способы описания переноса частиц. Для формирования тромбов сложной формы при больших числах Рейнольдса существенным становится наличие вихрей и возвратных течений, особенно при больших временах.

Список использованных источников

1. Leiderman K., Fogelson A., Grow with the flow: a spatial-temporal model of platelet deposition and blood coagulation under flow, *Mathematical medicine and biology*, 2011, №28, p.47-84.
2. Tosenberger, A.; Ataulakhanov, F.; Bessonov, N.; Panteleev, M.; Tokarev, A.; Volpert, V., Modelling of thrombus growth and growth stop in flow by the method of dissipative particle dynamics. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2012, 27, 507-522.
3. Kondratyev A., Lyaptsev A., Mikhailova I., Mathematical Modeling of Thrombus Growth, *Applied Mathematical Sciences*, 2015, Vol. 9, № 9, pp.429 - 446 .
4. J. Kim, D. Kim, H. Choi, An immersed-Boundary finite volume method for simulation of flow in complex geometries, *Journal of Computational Physics*, (2001), p. 171.
5. Ф.И. Атауллаханов, Г.Т. Гурия Пространственные аспекты динамики свертывания крови I Гипотеза // *Биофизика*, 1994– т.39, вып.1 – с. 91-96.
6. Ф.И.Атауллаханов, Г.Т.Гурия, А.Ю.Сафрошкина. Пространственные аспекты динамики свертывания крови. II. Феноменологическая модель // *Биофизика*, 1994 –т.39, вып.1 – с. 97-104
7. А. Л. Чуличков, А. В. Николаев, А. И. Лобанов, Г. Т. Гурия, Пороговая активация свертывания крови и рост тромба в условиях кровотока, *Матем. Моделирование*, 2000 –том 12, номер 3– с. 75–96
8. Ataulakhanov FI, Lobanova ES: Running pulses of complex shape in a reaction-diffusion model. *Phys Rev Lett* 2004;
9. Lobanova ES, Shnol EE, Ataulakhanov FI: Complex dynamics of the formation of spatially localized standing structures in the vicinity of saddle-node bifurcations of waves in the reaction-diffusion model of blood clotting. *Phys Rev* 2004;E 70: 032903.

УДК 519.8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЕ

Сергибаев Р.А.

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Астана
rassul_as@mail.ru

Математические методы теории систем массового обслуживания (СМО) обеспечивают возможность оценить вероятностно-временных характеристик узлов и компонент СМО, характеристик качества функционирования и рассчитать показатели эффективности её работы.

В теории массового обслуживания для исследования реального объекта важным этапом является формальное описание функционирования этого объекта. СМО считается заданной, если полностью описаны следующие ее компоненты [2, 4]:

- входящий поток требований (заявок, запросов);
- количество и типы обслуживающих устройств (приборов);
- длина очереди (емкости накопителей-буферов);
- время обслуживания заявок;
- дисциплина обслуживания (порядок обработки запроса).

Наиболее хорошо изученными системами массового обслуживания являются системы, в которых входящий поток заявок является простейшим. Для того, чтобы поток был простейшим, необходимо и достаточно, чтобы он был рекуррентным с показательным распределением длин интервалов между моментами поступления требований: $A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Это

свойство для показательной случайной величины ν в терминах условных вероятностей записывается следующим образом [2]:

$$P\{\nu \geq t + \tau | \nu \geq t\} = P\{\nu \geq \tau\}.$$

В классических приложениях теории потоков случайных событий рассматривается, как известно, в большинстве случаев лишь простейший вид таких потоков, когда вероятность наступления k событий в произвольно взятом промежутке времени длины t дается формулой [1,2]

$$\vartheta_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

где $\lambda > 0$ — постоянная.

Такой поток предполагается обычно потоком без последействия. Это означает, что для любой конечной подгруппы попарно не пересекающихся промежутков времени числа наступающих в этих промежутках событий представляют собой взаимно независимые случайные величины.

Относительно процесса обслуживания запросов в системе обычно предполагается, что обслуживание рекуррентное, то есть времена обслуживания последовательных запросов являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Функция распределения обозначается обычно через $B(t)$. Предполагается, что $B(+0) = 0$, то есть исключается возможность мгновенного обслуживания заявки.

Процесс обработки требований (запросов) во многих реальных системах состоит из их последовательной обработки в нескольких обслуживающих устройствах. Системы такого вида получили название многофазных СМО и кодируются в виде последовательности символов [3, 4]

$$A_1|B_1|n_1|m_1 \rightarrow B_2|n_2|m_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_r|n_r|m_r \rightarrow,$$

где A_1 — входящий поток на вход цепочки из r последовательных обслуживающих устройств;

B_k, n_k, m_k ($k=1, \dots, r$) — соответственно, распределение времени обслуживания, число параллельных каналов и число мест в буфере для ожидания в k -м звене цепочки;

символ $(\rightarrow)$ — переход запроса на вход следующего обслуживающего устройства по окончании его обслуживания в предыдущем.

Для исследования выходящего потока системы $GI|GI|\infty$ рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок, определяемый функцией распределения $A(x)$ длин интервалов между моментами наступления его событий. Время обслуживания поступающих заявок будем считать случайным, с функцией распределения $B(x)$, одинаковой для всех заявок.

Обозначим $z(t)$ — длину интервала от момента t до момента наступления следующего события в рекуррентном потоке, $n(t)$ — число событий просеянного потока, наступивших к моменту времени t .

Будем исследовать двумерный марковский процесс $\{z(t), n(t)\}$ [5, 6].

Для распределения

$$P(z, n, t) = P\{z(t) < z, n(t) = n\}$$

можно записать следующие равенства:

$$P(z - \Delta t, n, t + \Delta t) = P(z, n, t) - P(\Delta t, n, t) + \\ + (1 - S(t))P(\Delta t, n, t)A(z) + S(t)P(\Delta t, n - 1, t)A(z) + O(\Delta t).$$

Откуда получим систему дифференциальных уравнений Чэпмена- Колмогорова

$$\frac{\partial P(z, n, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z, n, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0, n, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(0, n - 1, t)}{\partial z} S(t)A(z) + \frac{\partial P(0, n, t)}{\partial z} (1 - S(t))A(z). \quad (1)$$

Обозначив

$$H(z, u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(z, n, t), \quad (2)$$

где $j = -1$ – мнимая единица, из системы (1) получим уравнение для функций $H(z, u, t)$

$$\frac{\partial H(z, u, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(z, u, t)}{\partial z} - \{1 - A(z)[(e^{ju} - 1)S(t) + 1]\} \frac{\partial H(0, u, t)}{\partial z}. \quad (3)$$

Будем полагать, что $B(x) = B_1(x/b)$, где $B_1(x)$ – заданная функция распределения случай-ной величины с единичным математическим ожиданием. Обозначим $\varepsilon = 1/b$, в уравнении (3) выполним замены

$$\tau = \varepsilon t, H(z, u, t) = F(z, u, \tau, \varepsilon), S(t) = S_1(\tau, \varepsilon), \quad (4)$$

$$\text{где } S_1(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} B_1(T_1 - \tau + \varepsilon T) - B_1(T_1 - \tau), & 0 < \tau \leq T_1, \\ B(T_1 - \tau + \varepsilon T), & T_1 < \tau \leq T_1 + \varepsilon T. \end{cases}$$

Полагая, что функция $B_1(x)$ дважды дифференцируема, вероятность $S_1(\tau, \varepsilon)$ можно за-писать в виде

$$S_1(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon T B_1(T_1 - \tau) + O(\varepsilon^2), & 0 < \tau \leq T_1, \\ O(\varepsilon^2), & T_1 < \tau \leq T_1 + \varepsilon T. \end{cases} \quad (5)$$

тогда для $F(z, u, \tau, \varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial F(z, u, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F(z, u, \tau, \varepsilon)}{\partial z} - \{1 - A(z)[(e^{ju} - 1)S_1(\tau, \varepsilon) + 1]\} \frac{\partial F(0, u, \tau, \varepsilon)}{\partial z}. \quad (6)$$

Имеет место следующая теорема [5, 6].

Теорема. Предельное, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значение $F(z, u, \tau)$ решения $F(z, u, \tau, \varepsilon)$ уравнения (6) имеет вид

$$F(z, u, \tau) = \frac{1}{a} \exp \left\{ \frac{1}{a} T (e^{ju} - 1) [B_1(T_1) - B_1(T_1 - \tau)] \right\} \int_0^z (1 - A(y)) dy, \quad (7)$$

где величина a определена равенством

$$a = \int_0^{\infty} (1 - A(y)) dy \quad (8)$$

Выполнив предельный переход при $z \rightarrow \infty$, учитывая $F(z, u, \tau) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} F(u, \tau)$, получим функцию $F(u, \tau)$:

$$F(u, \tau) = \exp \left\{ \frac{1}{a} T (e^{ju} - 1) [B_1(T_1) - B_1(T_1 - \tau)] \right\}. \quad (9)$$

Тогда с учетом замен (4) можно записать асимптотическое, при $\varepsilon \rightarrow 0$, приближенное равенство

$$\begin{aligned} H(u, t) &= H(\infty, u, t) = F(u, \tau, \varepsilon) \approx F(u, \tau) = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{a} T (e^{ju} - 1) [B_1(T_1) - B_1(T_1 - \tau)] \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{a} T (e^{ju} - 1) [B(bT_1) - B(bT_1 - t)] \right\}, \end{aligned}$$

поэтому для характеристической функции величины $n(t)$ запишем

$$Me^{jun(t)} H(u, t) \approx \exp \left\{ (e^{ju} - 1) \frac{1}{a} TB(t) \right\}.$$

При $t = bT_1$ получим

$$Me^{jun(bT_1)} = Me^{jum(bT_1, T)} \approx \exp \left\{ (e^{ju} - 1) \frac{1}{a} TB(bT_1) \right\},$$

устремляя в котором $T_1 \rightarrow \infty$ для характеристической функции величины $m(T)$ получим

$$Me^{jun(T)} H(u, bT_1) \approx \exp \left\{ (e^{ju} - 1) \frac{1}{a} T \right\}. \quad (10)$$

Таким образом, мы получили, что в условиях растущего времени обслуживания число обслуженных заявок в системе $GI|GI|_\infty$ за время T имеет распределение Пуассона с параметром T/a , где a – среднее значение длины интервала между моментами наступления событий в рекуррентном потоке. Следовательно, выходящий поток этой системы в условиях растущего времени обслуживания является простейшим, интенсивность которого в стационарном режиме функционирования системы массового обслуживания естественно совпадает с интенсивностью $1/a$ входящего потока.

Теперь рассмотрим линейную двухфазную систему массового обслуживания, с последовательными каналами, в которой распределение выходящего потока одного канала является входящим потоком для следующего канала [3, 4].

Входящий поток с интенсивностью λ считается простейшим, а также время пребывания требований на каждой фазе есть экспоненциально распределенная случайная величина с параметром μ_1 для первой и μ_2 – для второй фазы. При этом вероятность перехода требования с первой фазы на вторую равна r , а с вероятностью $1-r$ – покидает систему.

Состояние данной системы определим двумерным вектором $\{i, j\}$, где i – количество требований на первой фазе, j – количество требований на второй фазе. Изменение данного вектора во времени образует марковский процесс $\{i(t), j(t)\}$. Введем следующее обозначение $P(i, j, t) = P(i(t) = i, j(t) = j)$.

В случае пуассоновского потока с параметром λ , поступающего в первый из двух последовательных каналов, имеющих экспоненциальное время обслуживания с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно, имеем следующие уравнения для переходного состояния [3, 4]:

$$\frac{\partial P(i, j, t)}{\partial t} + (\lambda + i\mu_1 + j\mu_2)P(i, j, t) = \lambda P(i-1, j, t) + (i+1)\mu_1(1-r)P(i+1, j, t) + (i+1)\mu_1 r P(i+1, j-1, t) + (j+1)\mu_2 P(i, j+1, t) \quad (11)$$

и заданным начальным условиям $P(i, j, t_0) = P_0(i, j)$.

Найдем стационарное распределение вероятностей $P(i, j)$ состояния СМО. Полагаем, что $t_0 \rightarrow -\infty$, тогда производящая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= g(1,1) \times \exp\left\{(x-1)\frac{\lambda}{\mu_1}\right\} \times \exp\left\{(y-1)\frac{\lambda r}{\mu_2 - \mu_1}\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\} = \\ &= \exp\left\{(x-1)\frac{\lambda}{\mu_1}\right\} \times \exp\left\{(y-1)\frac{\lambda r}{\mu_2}\right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

из которого следует, что $P(i, j) = P_1(i)P_2(j)$,

$$\text{где } P_1(i) = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^i \frac{1}{i!} e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}}, \quad P_2(j) = \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^j \frac{1}{j!} e^{-\frac{\lambda}{\mu_2}}.$$

Полученное распределение $P(i, j, t)$ дает возможность сделать вывод о том, что аналогично случаю стационарного режима, в нестационарном режиме компоненты $i(t)$ и $j(t)$ в один и тот же момент времени t также являются стохастически независимыми и подчиняются распределению Пуассона.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.:Знание, 1976. 203с.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. –М.: Ком-Книга, 2005
3. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. –М.: Физматлит, 2004
4. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания. – М.: Советское радио, 1971, 570 с.
5. Сарымсаков Т.А. Основы теории процессов Маркова. М.:Гос.издательство технико-теоретической литературы. 1954. 208с.
6. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.:Гос.издательство физико-математической литературы, 1963. 528с.

ҚИЫНДЫҚ ДЕҢГЕЙІ ӘРТҮРЛІ СҰРАҚТАРДАН ТҰРАТЫН ОБЪЕКТИВТІ ЖӘНЕ БІРДЕҢГЕЙЛІ ТЕСТ ҚҰРУ АЛГОРИТМІ

Төлебаева Г.М.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

E-mail: gulnau_94@mail.ru

Ғылыми жетекші Ғаббасов М.Б.

Білім мен техника дамыған бүгінгі заманда оқу орындарында білім алушылардың алған білімдерін сараптау тұрғысында тестілеу тәсілі күннен күнге кең етек алып келеді. Сөйте тұра бүгінгі күнге дейін тестті дайындау мен оның нәтижесін талдау жөнінде белгілі бір заңдылыққа негізделген тұжырымдар аз. Ғылыми негізделіп, дұрыс құрастырылған тестті жүйелі пайдалану оқыту сапасын жақсартуға көмектеседі. Студенттер мен оқушылардың білімін тексеру үшін тестілеуді кеңінен енгізу білімді тексерудегі тестілеу жүйесінің теориялық негізін жасауды және тестті құру мен тест нәтижелерін қайта өңдеуге дейінгі

тестілеу процестерін автоматтандыратын қолданбалы программалардың дайын пакеттерін құруды қажет етеді[1].

Бұл жұмыстың мақсаты - объективті және бірдеңгейлі тест жасау алгоритмін құру. Біздің тәсіліміздің негізгі қағидасы тест тапсырмаларының жинағын және тест құру үрдісін бөліктеу болып табылады.

Белгілі бір пәннен n сұрақ бар, барлық сұрақтар m тақырыпқа бөлінген. t -шы тақырыптағы барлық сұрақтар саны - n_t . Қайталанбайтын әртүрлі сұрақтар жиынтығын билет деп атаймыз. Бір билетте k сұрақ, яғни t -шы тақырып бойынша k_t сұрақ бар,

$$\sum_{t=1}^m k_t = k. \quad t\text{-шы тақырыптағы } j\text{-шы сұрақтың қиындық деңгейі} - a_j^t [2].$$

[3] жұмыстағы объективті тест құру алгоритмі көмегімен қиындық деңгейі әртүрлі сұрақтардан объективті тест құруға болады. Бірақ ол теңдеңгейлі тест болмауы мүмкін.

Бізге l нұсқадан тұратын объективті және бірдеңгейлі тест құру керек болсын. Ол тестті $\{x_{ij}^t\}$ кестесі түрінде қарастырамыз, мұндағы $t=1,2,\dots,m; i=1,2,\dots,l; j=1,2,\dots,n_t$ және егер t -шы тақырыптың j -шы сұрағы i -шы билетке кірсе $x_{ij}^t = 1$, басқа жағдайда

$$x_{ij}^t = 0. \quad \text{Онда } i\text{-шы билеттің қиындық деңгейі } \chi_i = \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^{n_t} a_j^t x_{ij}^t [2].$$

Әрбір тақырыптан құрылған тесттер объективті және теңдеңгейлі болса, олардың қосындысынан құрылған тест те объективті және теңдеңгейлі тест болады. Сондықтан теңдеңгейлі тест құру үшін тақырып біреу болатын жағдайды қарастырсақ жеткілікті.

Тестілеудің ақпараттық жүйесінде сұрақтардың қиындық деңгейлері оқытушы белгілейді. Ол үшін ақпараттық жүйенің сұрақтардың деңгейін белгілейтін ыңғайлы интерфейсі болу керек. Тест сұрақтарының деңгейі білім алушының дайындық деңгейіне сай және тест сұрақтары әртүрлі деңгейде болғаны жөн. Оқытушы тест құрастырғанда сұрақтардың қиындық деңгейін әртүрлі шкалада, мысалы, 5-баллдық, 10-баллдық, p -баллдық немесе процент түрінде беруі мүмкін. Егер деңгейлер процент түрінде берілсе, онда жүйе оны автоматты түрде n_t сұрақтарға жинақтап p -баллдық шкалаға келтіреді[4].

$\alpha=1,2,\dots,p-1, p$ деңгейлік сұрақтар берілсе, олардың әрқайсысының барлық сұрақтардың ішіндегі санын x_α немесе үлесін $\frac{x_\alpha}{n}$ деп алынады. Сәйкесінше $\sum_{\alpha=1}^p x_\alpha = n$

екені белгілі. k - бір билеттегі сұрақтар саны екенін ескеріп, $\left[\frac{k}{n} x_\alpha \right]$ - α -ші деңгей

сұрақтарының бір билетте кездесетін минималды санын білдіреді. Ал $k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n} x_\alpha \right] -$

билетте жетпеген сұрақтар саны. Теңдеңгейлі тест үшін әрбір α деңгейлік сұрақ әр билетте ең болмағанда $\forall \alpha : \left[\frac{k}{n} x_\alpha \right]$ рет кездесуі қажет. Бұл тест билетіндегі тақырыптың барлық деңгейлерін қамтитындығын білдіреді[5]. Тест құру барысында тест тапсырмаларының минималды саны бойынша мәліметтерді 1-кестеден көруге болады.

Қиындық деңгейлері	1	2	...	$p-1$	p
Барлық сұрақтардың ішіндегі саны	x_1	x_2	...	x_{p-1}	x_p
Кем дегенде неше сұрақ кездесу керек	$\left[\frac{k}{n}x_1\right]$	$\left[\frac{k}{n}x_2\right]$	...	$\left[\frac{k}{n}x_{p-1}\right]$	$\left[\frac{k}{n}x_p\right]$

Айталық, тесттің сұрақтарының қиындықтары 1-ден p -ға дейін болсын. Онда егер тесттегі кез келген билеттің қиындық деңгейі

$$\forall i, \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right] \alpha + k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right] \leq \chi_i \leq \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right] \alpha + \left(k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right]\right) p \quad (1)$$

$$\text{немесе } \forall i, \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right] (\alpha-1) + k \leq \chi_i \leq \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right] (\alpha-p) + kp \quad (1')$$

интервалда жатса, **тест теңдеңгейлі** деп аталады. Егер $k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right] = 0$ болса,

яғни $\frac{k}{n}x_{\alpha} - \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right] = 0$ теңдігі орындалса, тесттегі билеттің қиындығы $\sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right] \alpha$

шамасына тең болады. 1-теңсіздіктің екі жағы теңесіп, интервал дәл анықталады.

Осылайша сұрақтардың қиындық деңгейі әртүрлі болғанда келесі есеп қойылады:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = k, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^l x_{ij} = q, \quad j = 1, 2, \dots, n_t \quad (3)$$

$$\forall x_{ij} : x_{ij} \cdot (1 - x_{ij}) = 0 \quad (4)$$

$$\forall i_1, i_2 : \sum_{j=1}^n |x_{i_1 j} - x_{i_2 j}| > 0 \quad (5)$$

$$\forall i, \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right] \alpha + k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right] \leq \chi_i \leq \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right] \alpha + \left(k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n}x_{\alpha}\right]\right) p \quad (6)$$

2-5 шарттары орындалатындай

$$X = \{x_{ij}, i = 1, 2, \dots, l; t = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n_t\} = \begin{cases} x_{ij} = 1 & \text{егер } y_{ij} = \alpha_j \\ x_{ij} = 0 & \text{егер } y_{ij} = 0 \end{cases}$$

және 6-шарты орындалатындай

$$Y = \{y_{ij}, i = 1, 2, \dots, l; t = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n_t\} = \{\alpha_j x_{ij}\}$$

матрицаларын анықтау.

Егер $x_{ij} = 1$ болса, онда t -шы тақырыптың α_j деңгейдің j -шы сұрағы тесттің i -ші билетіне кіреді дегенді білдіреді.

2-6 есептің сандық шешімін табу үшін келесі алгоритм ұсынылады.

1-қадам. Алдымен тест жинағындағы барлық сұрақтардың саны n , билеттер саны l , бәр билеттегі сұрақтар саны $k, 1, 2, \dots, \alpha$ деңгейлер және тест жинағындағы олардың саны x_α енгізіледі. $Y = \{y_{ij}\}$ матрицасының әрбір i — ші жолындағы α деңгей сұрақтарының ең аз дегенде неше рет кездесу қажеттігі анықталады.

2-қадам. Барлық i, j үшін $x_{ij} = 0$ меншіктеледі. Ал $Y = \{\alpha_j x_{ij}\}$ матрицасы X матрицасының мәндеріне сәйкес анықталады.

3-қадам. Координатасы i_0, j_0 болатын ұяшықты кездейсоқ таңдап, $x_{i_0 j_0} = 1$ меншіктеледі.

$$Y = \{y_{ij}, i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, n\}$$
 матрицасы
 $X = \{x_{ij}, i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, n\}$ матрицасының мәндеріне сәйкес қайта анықталып отырады.

4-қадам. Әрбір i, j ұяшығы және әрбір α деңгей үшін

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{егер } x_{ij} = 1 \\ (k_i - \sum_{j=1}^n x_{ij})(q_j - \sum_{i=1}^l x_{ij}) \left[\frac{k}{n} x_\alpha \right] - \sum_{i=1}^{x_\alpha} x_{ij}, & \text{егер } x_{ij} = 0 \end{cases}$$

сұраныс мәні есептеледі.

5-қадам. $s_0 = \max_{i,j} s_{ij}$ есептеледі, егер $s_0 > 0$ болса, онда $s_{ij} = s_0$ болатын барлық ұяшықтар анықталады. Егер $s_0 = 0$ болса, 8-қадамға өтеді, басқа жағдайда 6-қадам орындалады.

6-қадам. $s_{ij} = s_0$ шартын қанағаттандыратын ұяшықтардың ішінен (i_0, j_0) ұяшығын кездейсоқ таңдап, i_0 жолы үшін $x_{i_0 j_0} = 1, y_{i_0 j_0} = \alpha_{ij}$, болғандағы $w_{i_0} = \min_{i_1 \neq i_0} \sum_{j=1}^n |x_{i_0 j} - x_{i_1 j}|$ мәні есептеледі. Егер $w_{i_0} > 0$ болса, онда $x_{i_0 j_0} = 1, y_{i_0 j_0} = \alpha_{ij_0}$ қойылады, ал егер $w_{i_0} = 0$ болса, онда $s_{ij} = s_0$ шартын қанағаттандыратын ұяшықтардың ішінен басқа бір (i_0, j_0) ұяшығы таңдалады және 6-қадам қайта орындалады. Егер $s_{ij} = s_0$ шартын қанағаттандыратын барлық ұяшықтар таңдалынып қойылса және олардың ешқайсысына бірлік меншіктелмесе, $s_1 = \max_{i,j; s_{ij} \neq s_0} s_{ij}$ болатын $s_{ij} = s_1$ шартын қанағаттандыратын барлық ұяшықтарға қайталанады.

6-қадам. $s_{ij} = s_0$ шартын қанағаттандыратын ұяшықтардың ішінен (i_0, j_0) ұяшығын кездейсоқ таңдап, i_0 жолы үшін $x_{i_0 j_0} = 1$ болғандағы $w_{i_0} = \min_{i_1 \neq i_0} \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n |x_{i_0 j} - x_{i_1 j}|$ мәні есептеледі. Егер $w_{i_0} > 0$ болса, онда $x_{i_0 j_0} = 1$ және $y_{i_0 j_0} = \alpha_j$ қойылады, ал егер $w_{i_0} = 0$ болса, онда $s_{ij} = s_0$ шартын қанағаттандыратын ұяшықтардың ішінен басқа бір (i_0, j_0) ұяшығы таңдалады және 6-қадам қайта орындалады. Егер $s_{ij} = s_0$ шартын қанағаттандыратын барлық ұяшықтар таңдалынып қойылса және олардың ешқайсысына 1

меншіктелмесе, $s_1 = \max_{i,j; s_{ij} \neq s_0} s_{ij}$ болатын $s_{ij} = s_1$ шартын қанағаттандыратын барлық ұяшықтарға қайталанады.

7-қадам. 4-қадам орындалады.

8-қадам. $X = \{x_{ij}, i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, n\}$ матрицасы үшін $\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^l k_i$

шарты тексеріледі, егер шарт орындалса, онда есеп шешілді. Егер орындалмаса, 9-қадам орындалады.

4-қадамда $Y = \{y_{ij}, i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, n\}$ матрицасы α_j деңгейлердегі

сұрақтардың минималды саны бойынша толтырылған еді. Егер $\sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n} x_{\alpha} \right] < k$ болса, әрбір

билетте әлі де $k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n} x_{\alpha} \right]$ сұрақ жетпейді дегенді білдіреді. Яғни

$Y = \{y_{ij}, i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, n\}$ матрицасында α_j -лардың $k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n} x_{\alpha} \right]$ санын

толтыру керек.

9-қадам. Сондықтан әрбір i, j ұяшығы үшін

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{егер } x_{ij} = 1 \\ (k - \sum_{j=1}^n x_{ij})(q_j - \sum_{i=1}^l x_{ij}), & \text{егер } x_{ij} = 0 \end{cases}$$

сұраныс мәні есептеледі.

10-қадам. $s_0 = \max_{t,i,j} s_{ij}$ есептеледі, егер $s_0 > 0$ болса, онда $s_{ij} = s_0$ болатын барлық

ұяшықтар анықталады. Егер $s_0 = 0$ болса, 13-қадамға өтеді, басқа жағдайда 11-қадамға.

11-қадамда $s_{ij} = s_0$ шартын қанағаттандыратын ұяшықтардың ішінен басқа бір (i_0, j_0) ұяшығы табылатындығын көрсету үшін $s_{ij} = s_0$ шартын қанағаттандыратын (i_0, j_0) ұяшығы табылмайды деп кері жоримыз. Яғни кез келген жолда тура k сұрақ, ал кез келген бағанда тура q сұрақ бар дегенді білдіреді. Яғни X матрицасында тура $k \cdot l$ 1-лер бар. Бұл жағдай тек қана $s_0 = 0$ болғанда ғана орындалады. Сондықтан қайшылыққа келеміз. Яғни $s_{ij} = s_0$ шартын қанағаттандыратын ұяшықтардың ішінен басқа бір (i_0, j_0) ұяшығы әрқашан да табылады

12-қадам. 9-қадам орындалады.

13-қадам. $\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^l k_i$ шарты тексеріледі, егер орындалса, онда есеп

шешілді. Егер орындалмаса, 14-қадам орындалады.

14-қадам. $x_{i_0 j_0} = 1, \sum_{i=1}^l x_{i j_0} < q_{j_0}$ және $\sum_{j=1}^n x_{i_0 j} < k_{i_0}$ болатын (i_0, j_0) ұяшығы

анықталады. Онда $x_{i_1 j_1} = 1, x_{i_0 j_1} = 0, x_{i_1 j_0} = 0$ (7) болатындай (i_1, j_1) ұяшығы табылады.

Егер сондай ұяшық бар болса, $X = \{x_{ij}\}$ матрицасы келесідей түрде қайта анықталады. $x_{i_1 j_1} = 0, x_{i_0 j_1} = 1, x_{i_1 j_0} = 1$.

Сәйкесінше $Y = \{y_{ij}, i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, n\}$ матрицасы $X = \{x_{ij}\}$ матрицасының мәндеріне сәйкес анықталады. 13-қадам орындалады.

$X = \{x_{ij}\}$ матрицасы үшін $x_{i_0 j_0} = 1, \sum_{i=1}^l x_{i j_0} < q_{j_0}$ және $\sum_{j=1}^n x_{i_0 j} < k_{i_0}$ болған

жағдайда 14-қадамда 7-теңдікті қанағаттандыратын ұяшық әрқашан табылатындығы [3] жұмыста дәлелденген. Сәйкесінше $Y = \{y_{ij}\}$ матрицасы үшін де 14-қадам орындалады. Себебі X, Y матрицалары бір-бірінен тәуелді.

Тесттегі әрбір билетке объективтілік және теңдегейлік шарты орындалса, онда есеп шешілді.

Теорема. Берілген алгоритмді қолданып анықталған матрица 2-6 есептің шешімі

X матрицасының әрбір жолы үшін 5 шарт орындалады, Егер белгілі бір i_1, i_2 жолдары үшін $\sum_{j=1}^n |x_{i_1 j} - x_{i_2 j}| = 0$ және $\sum_{j=1}^n |y_{i_1 j} - y_{i_2 j}| = 0$ болса, тестте бірдей билеттер кездеседі деген сөз. 6,11-қадамдар i_1, i_2 жолдарындағы сәйкес элементтер бірдей болмауын қамтамасыз етеді.

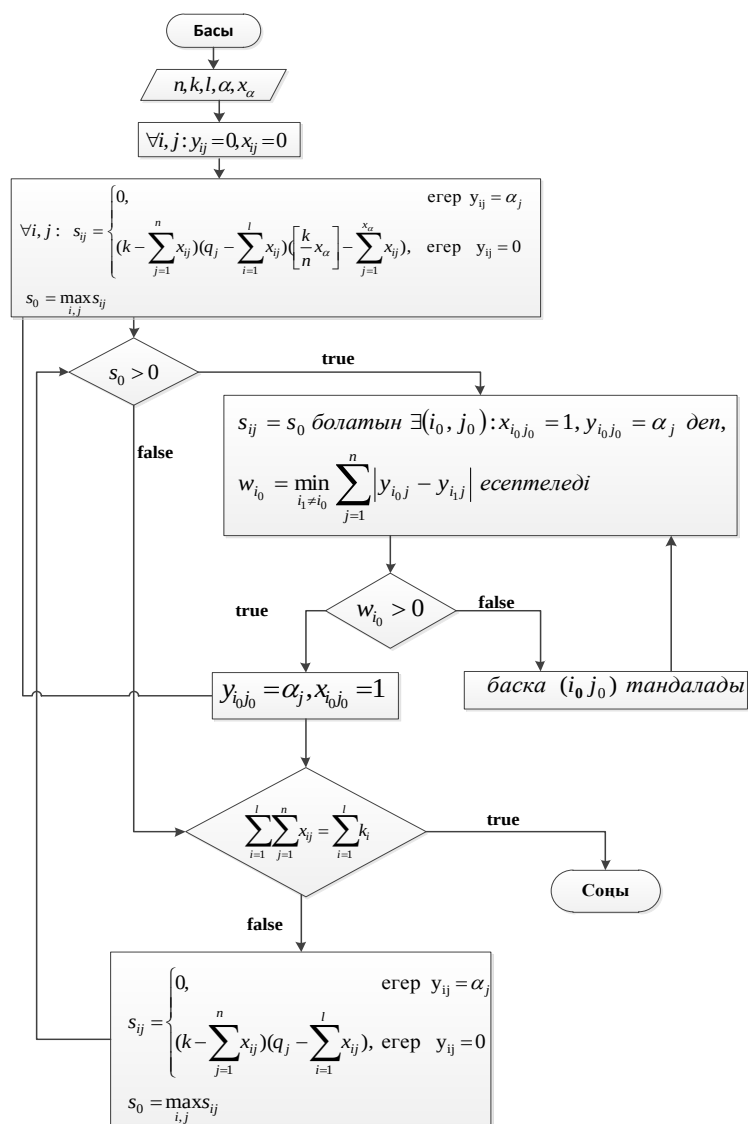
Құрылған Y матрицасының әрбір жолы үшін 6-теңсіздік орындалады. Себебі тесттегі белгілі бір деңгейдің сұрақтары бір билетте минимум $\left[\frac{k}{n} x_\alpha \right]$ рет кездесуін қамтамасыз ету үшін (4,5)-қадамдар орындалады. Ал жетпеген $k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n} x_\alpha \right]$ сұрақтарды кез келген деңгейден алуға болады. Яғни жетпеген сұрақтардың қиындықтарының суммасы ең болмағанда $k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n} x_\alpha \right]$ шамасына, ал максималды мәні $\left(k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n} x_\alpha \right] \right) p$ шамасына

тең бола алады. Сондықтан есептің шешіміндегі Y матрицасының әрбір жолындағы элементтердің қосындысы 6 интервалда әрқашан да жатады, ал белгілі бір i_0 үшін 6-

теңсіздік орындалмаса, яғни $\chi_i \leq \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n} x_\alpha \right] \alpha + k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n} x_\alpha \right]$ немесе

$\chi_i \geq \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n} x_\alpha \right] \alpha + \left(k - \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{k}{n} x_\alpha \right] \right)$ болып қалса, онда 14-қадамды орындауға болады.

2-6 есептің сандық шешімін алу алгоритмі 1-суретте блок-схема түрінде көрсетілген. Бұл алгоритм негізінде әртүрлі деңгейлі сұрақтардан тұратын объективті және теңдеңгейлі тест құрылады.



1-сурет. Әртүрлі деңгейлі сұрақтардан тұратын объективті және теңдеңгейлі тест құру алгоритмінің блок-схемасы.

Мысал: 2 тақырыпты қамтитын, әрқайсысы сәйкесінше 18 және 20 сұрақтық жинақтан 5 және 6 сұрақтан тұратын 10 билет жасау керек болсын. Сұрақтардың қиындық деңгейі α және x_α берілген. Ұсынылған алгоритмді автоматтандыратын бағдарлама құрылды. Нәтижесінде 2-кестедегі матрицаны аламыз.

2-кесте

		t=1																t=2																							
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8		
<i>l</i>		1										2										1					2					3					x_i				
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	3	0	0	18
2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	2	2	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	2	2	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	3	21	
3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2	2	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	19	
4	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	2	0	2	2	0	0	0	2	0	0	0	3	0	21	

5	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2	0	2	2	0	0	0	3	0	0	0	0	20
6	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	1	1	0	1	0	2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	3	0	18
7	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	2	2	0	0	1	1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	3	0	0	0	18	
8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	2	0	0	1	0	0	0	0	2	2	0	0	0	2	2	0	3	0	0	0	0	21		
9	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	2	0	2	2	0	0	1	0	0	0	2	0	2	2	0	0	0	0	3	3	0	0	0	0	22	
10	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	1	1	1	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	18	

Тесттегі билеттердің иындық деңгейі [18;22] интервалында жатыр. Егер матрицаның i, j ұяшығында 0-ден өзгеше сан тұрса яғни ол t –шы тақырыптың j –шы сұрағы i –шы билетке кіріп тұр дегенді білдіреді. Осы алгоритм көмегімен қолданушы тест сұрақтарының жинағынан объективті және теңдеңгейлі тест жасай алатын бағдарлама жасай алады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1.Рудинский И.Д., Клеандрова А.А. Концепция количественного оценивания объективности педагогического тестирования знаний // Информатика и образование. – № 12. – 2003г. Стр.100-104.

2.Габбасов М.Б., Математические модели объективных и равностепенных тестов. // Применение математического моделирования и информационных технологий в исследованиях социально-экономических проблем. Астана. 2011г.

3. Төлебаева Г.М. Алгоритм построения объективных тестов без учета сложности вопросов. // «Ғылым және білім-2017» студенттер мен жас ғалымдардың XII Халықаралық ғылыми конференциясының баяндамалар жинағы, Астана, 2017 ж, 1666-1668 б.

4. В.Е. Климнюк, к.т.н. В.А. Кирвас, к.т.н. С.И. Козыренко - Формирование тестов заданной сложности

5. Данаев Н.Т., Лукпанова Г.Г. Моделирование составления тестов с учетом трудности заданий. /Проблемы вычислительной математики и информационных технологий. Алматы. 1999 г. Стр. 156-160

ПОСТРОЕНИЕ ОНТОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И СОЗДАНИЕ БАЗЫ ЗНАНИЙ ТЕПЛОВОЗА

Тулгабаев Д.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: sharalt@mail.ru

Процесс развития современного общества характеризуется постоянно возрастающей ролью информационных технологий в науке, производстве и управлении. В последние годы увеличился объем информационных потоков и сложность ориентации на информационные ресурсы, что привело к необходимости поиска новых способов хранения, представления, организации и обработки информации в компьютерных и связанных системах. Одним из результатов исследования стало появление онтологических технологий и их использование в информационных системах[1]. Онтология предметной области является формальной моделью концептуальной структуры предметной области. В общеизвестной формулировке онтология определяется как формальная спецификация концептуализации, которая имеет место в определенном контексте предметной области.

Онтологии являются инструментом системного анализа предметной области, который обеспечивает представление совокупности понятий, которые характеризуют предметную область, и их отношения.

Целью работы является построение онтологической модели и создание базы знаний тепловоза. Поставленная цель требует решения таких задач, как:

1. Исследование существующих методов и технологии построения онтологии;
2. Формирование онтологической модели, обеспечивающую возможность автоматизации базы знаний тепловоза;

3. Разрабатывание метода автоматизированного построения онтологии в области данных тепловоза.
 4. Построение алгоритмов, реализующих метод автоматизированного построения онтологии и баз знаний тепловоза.
- Вначале была построена онтологическая модель предметной области тепловоза, которая показана на рисунке 1. А также на рисунке 2 представлен вариант онтологии проектирования тепловоза.

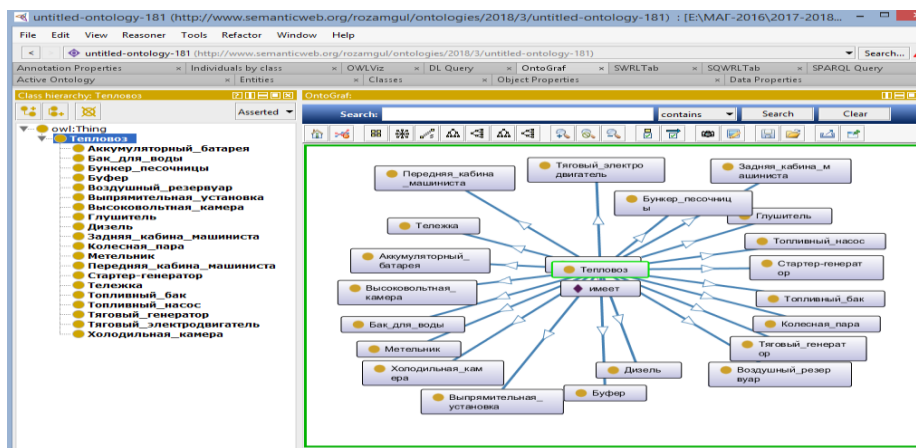


Рис.1 - Часть онтологии предметной области тепловоза

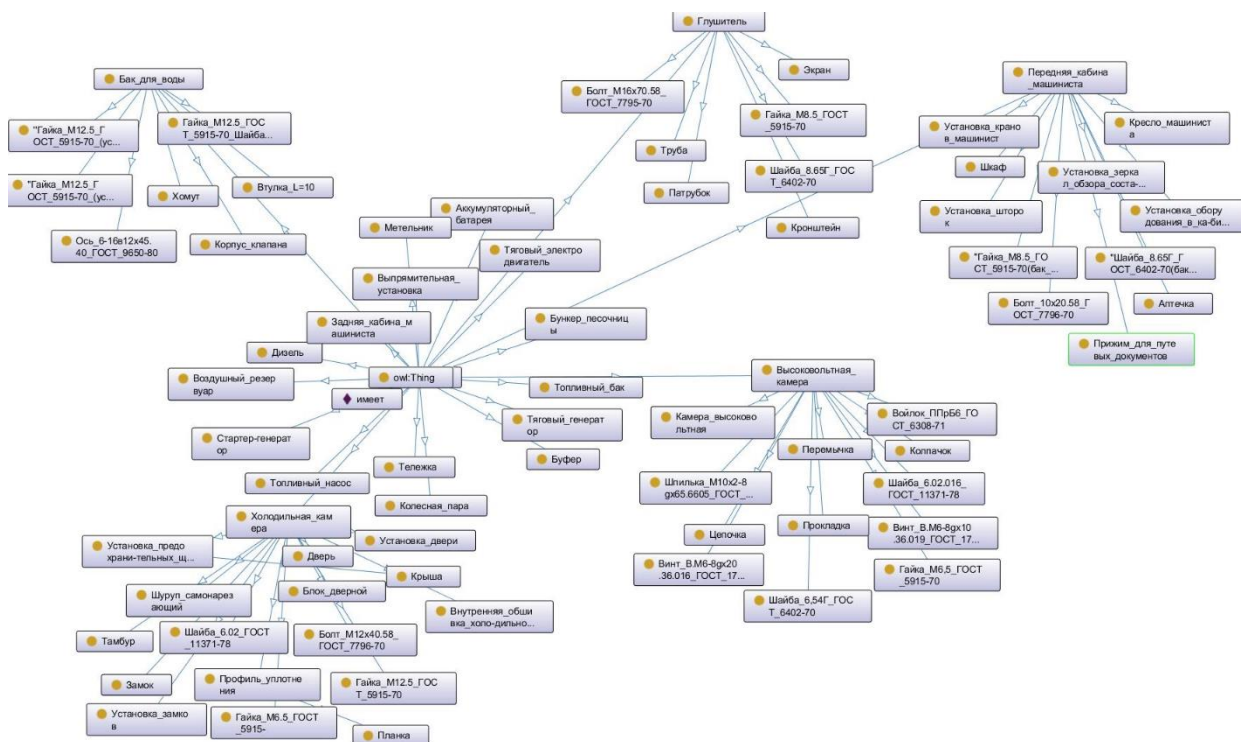


Рис.2 - Вариант онтологии проектирования тепловоза
Проектирование создание базы знаний

В данной работе реализуется система «База знаний Тепловоза», которая предназначена для хранения информации определение базы знаний тепловоза.

«База знаний Тепловоза» представляет систему управления базой знаний, которая позволяет производить поиск по базе знаний по запросу пользователя. Программа предоставляет собой интерфейс для управления содержимым базы знаний «Тепловоз» в соответствии с требованиями. Пользователь имеет возможность ввести запрос, который относится к конкретной предметной области. С помощью созданной базы знаний пользователь сможет осуществить запрос к базе знаний и получить ответ системы на данный запрос. Ответ должен представлять поиск по данной тематике. На заданный вопрос дается определение, что является существительным, глаголом, прилагательным, гипоним, холоним, синоним, антоним, омоним, мероним, гипероним, который показан на рисунках 3 и 4.



Рис.3 - Окно приложения «База знаний Тепловоза»

Имеется поле для того, чтобы вводить запрос пользователя, на ввод которого запроса накладывается несколько ограничений, а именно:

- они должны состоять не более 90 символов, потому что поиск будет производиться по строке и по введению запроса может привести к некоторым задержкам работы программы;
- Допустим, если пользователь введет пустой запрос, то программа будет сообщать об этом пользователю и предложит ввести запрос еще раз.

И также пользователю будет доступна история запросов: запросы упорядочены в алфавитном порядке.

Поиск начинается при нажатии кнопки «ПОИСК», если все введено правильно, то программа выдаст ответ, или сообщит что не существуют ответ на заданный вопрос.

Программа выдает ответ в виде списка, в котором содержится:

- текст, то есть сам ответ на запрос пользователя; на который дается определение, что является существительным, глаголом, прилагательным, гипоним, холоним, синоним, антоним, омоним, мероним, гипероним.

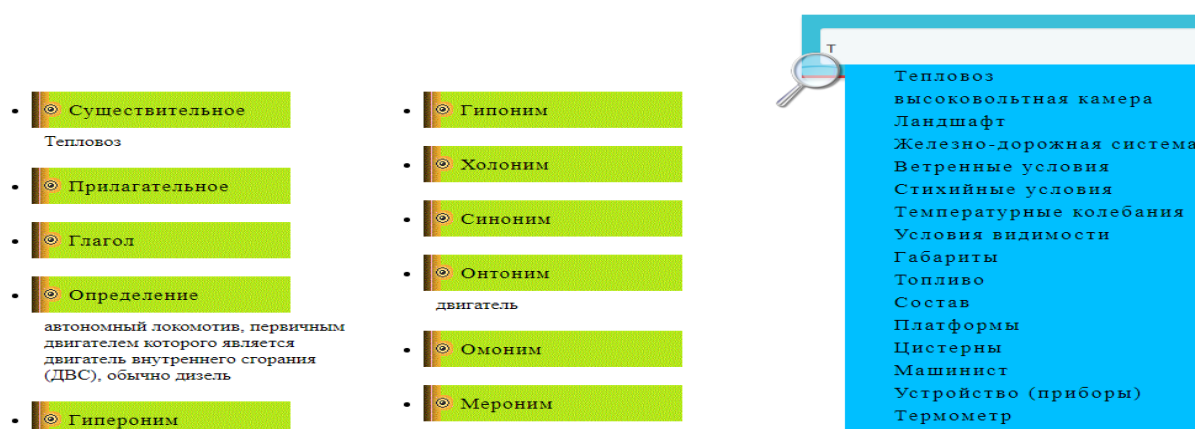


Рис.4 - Ответ системы на запрос пользователя «Тепловоза»

Программа выводит ответ не только в текстовой информации, но и в графической, пользователь двойным нажатием по нужному его элементу может получить графическое

представление, для того чтобы, подробно ознакомиться с графической информацией по данному вопросу.

Для каждого документа, который хранится в базе знаний, имеются каталоги с графическими файлами документа. Это безусловно увеличивает требования к объему памяти компьютера.

На рисунке 5 представлен еще один пример запроса к базе знаний и ответа системы.

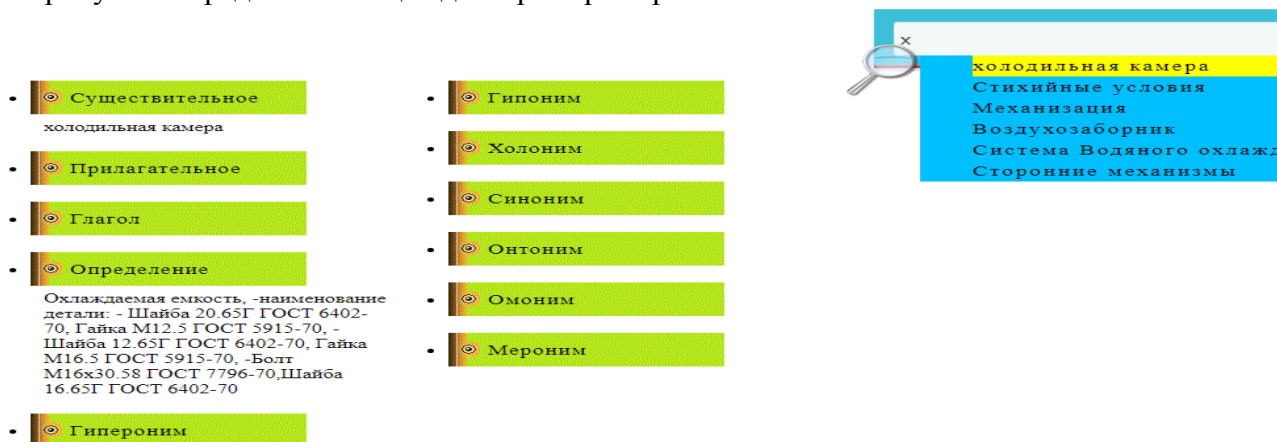


Рисунок 5 – Ответ системы на запрос пользователя «Холодильная камера»

В результате выполненной работы создано специальное программное обеспечение, которое автоматизирует операции включения понятий в онтологию предметной области. Предлагаемое решение уменьшает количество операций, выполняемых вручную экспертом предметной области в процессе создания онтологии, исключает влияние субъективности эксперта и необходимость принятия 9 интуитивных решений при включении новых понятий в онтологию[2]. Указанные свойства повышают потребительские качества и расширяют возможности программных средств, используемых для построения онтологии предметной области, в случае применения в них разработанного метода.

Заключение: Созданные онтологические модели и базы знаний тепловоза, а также программные средства станут основой для построения систем семантически ориентированного доступа к информационным ресурсам, включая навигационные и поисковые системы, электронные обучающие системы (в частности, симуляторы тепловозов), которые используют онтологическое структурирование элементы знаний и учебные объекты, информационные системы научно-исследовательских целей, обеспечивающие построение единой концепции, согласованной между моделью предметной области и базами данных специалистов.

Список использованных литератур:

- 1 Gruber T.R. A translation approach to portable ontology specifications // Knowledge Systems Laboratory, Stanford University, California. – 1972. – 103 p
- 2 Gruber T.R. What is an Ontology? // Knowledge Systems Laboratory, Stanford University, California. – 2001.– 94 p.

ANALYZING THE CONTENT OF INTERNATIONAL EDUCATIONAL MASTER PROGRAMS IN COMPUTATIONAL LINGUISTICS

A.Sharipbay, K.Sagindykov, R.Niyazova, R.Turebayeva

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

E-mail: sharalt@mail.ru, ksagin@mail.ru, rozamgul@List.ru, 58stud@mail.ru

Abstract: Training of national cadres in the field of computer linguistics should be carried out through the development and implementation of quality educational programs based on the study of international experience in the development and implementation of educational programs in com-

puter linguistics, tuning methodology tools, as well as the questioning, diagnosis and classification of training needs.

To develop the educational program Erasmus + we have analyzed the educational programs of foreign universities and institutions. And it was clear that, although the content of their educational programs of some universities relate to computer linguistics, but are called differently.

Based on the questioning of potential employers and the analysis of educational programs on computer linguistics of various universities, a list of competencies and disciplines was defined for the creation of a draft curriculum on computer linguistics.

Presented here is a master's educational program "Computer Linguistics", implemented under the Erasmus + project.

Key words: educational programs, computational linguistics, Mathematical Foundations of Computer Linguistics, Semantic analysis of texts, Methods of speech synthesis

1. Introduction

Modern computer linguistics covers subjects, related to automatic analysis of natural language. At first, These includes machine translation, information retrieval, voiced data entry, emotional analysis of texts and messages, etc. Second, the creation of educational and reference language resources, experimental tasks in the field of language theory. Third, the development of variety of applications that rely on language data.

Computer linguistics is necessary in startups, developing new linguistic technologies - for example, to create robots, understanding speech and responding in natural language, to automatically recognize emotions in the texts of users of social networks; in companies, engaged in processing large amounts of unstructured text data.

Currently, specialists in computer linguistics are very much in demand in the largest companies, involved in development in the field of linguistics. In Central Asia, educational task of training such personnel is quite new, and it became apparent only recently in connection with the rapid development of artificial intelligence. At the same time, there are no educational programs for targeted mastering in the field of computer linguistics, which proves again the obvious relevance of the master's educational program on computer linguistics, implemented under the Erasmus+ project, which includes the following member universities:

1. University of Santiago de Compostela, USC
2. University of a Coruña, UDC
3. Technological Educational Institution of Athens, TEIATH
4. University of Porto, U.PORTO
5. Adam Mickiewicz University in Poznań, AMU
6. Urgan State University, UrSU
7. Samarkand State Institute of Foreign Languages, SamSIFL
8. Tashkent State University of the Uzbek language and literature, TSUUL
9. National University of Uzbekistan, NUUZ
10. Republican State Enterprise operating under the right of economic management A.Baitursynov Kostanay State University of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, KSU
11. L.N. Gumilyov Eurasian National University, ENU
12. Al-Farabi Kazakh National University, KazNU[1].

In Kazakhstan, the classifier of specialties for higher education does not include specialty "Computer Linguistics", but at L.N. Gumilyov ENU, since 2013 the training path "Computer Linguistics" has been developed and implemented within the framework of educational programs for bachelor's specialties - "5B060200-Informatics" and magistracy - "6M060200-Informatics". For that we conducted a survey of representatives of employers of specialists in the field of computer linguistics, studied educational programs on computer linguistics of foreign universities.

2. Questioning of employers of specialists in the field of computer linguistics

In order to find out the employers' opinion about the prospective competencies required for specialists in the field of computer linguistics, we conducted a questionnaire using the following application:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScT6iJA5e-iYKIC4mAIZcF_sMch77CRylhGUwmi_FQ1afiRWA/viewform?c=0&w=1&usp=mail_form_link

The purpose of the questionnaire is to determine the competencies and needs of specialists in the field of computer linguistics based on interviewing potential employers.

The result of the questionnaire: the definition of the list of competencies and the needs of specialists in the field of computer linguistics.

3. Analysis of educational programs on computer linguistics of foreign universities

The purpose of the analysis of educational programs is to determine the level of education and the list of disciplines that provide these level. The result of the analysis of educational programs is the definition of a list of disciplines on the basis of an analysis of the content of international educational master's programs in the field of computer linguistics.

Training of national cadres in the field of computer linguistics should be carried out through the development and implementation of quality educational programs based on the study of international experience in the development and implementation of educational programs in computer linguistics, tuning methodology tools, as well as the questioning, diagnosis and classification of training needs.

To develop the master's educational program "Computer Linguistics", implemented by the Erasmus+ project, we analyzed the educational programs of the following universities and institutes:

Table 1 - List of disciplines in Computational Linguistics

№	Country, name university, Web-site	Disciplines
1.	RGGU Russian State University for the Humanities, www.rgggu.ru	Introduction to fundamental linguistics Typology, comparativistics, areal linguistics Modern syntactic theories Case and experimental methods in semantics Introduction to Computational Linguistics Computer Sociolinguistics Mathematical Foundations of Linguistics Statistical models in linguistics Methods of artificial intelligence in Computational Linguistics Programming of linguistic tasks Linguistic annotation / markup Specialized linguistic databases Methods for evaluating AOT systems Models and methods of Computational Linguistics Classification methods and machine learning Linguistic basis of machine translation Computer Parsing Analysis of oral speech

2.	SPbSU St. Petersburg University, spbu.ru	Methods and models of ontological engineering Methods of knowledge engineering in humanitarian research Text understanding systems Text analysis models and their software implementation Statistical methods in language engineering Hull methods in language engineering Linguistics of the text and theory of verbal communication Languages and standards for describing information resources Expert systems and methods of inductive generalizations Methods of decision support Methods of software implementation of intelligent information technologies Mathematical modeling in data processing technologies Methodology and technology of designing information systems Information Society and Problems of Applied Informatics Business English Philosophical problems of science and technology
3.	HSE High School of Economics Computational Linguistics	Linguistic data: quantitative analysis and visualization Introduction to Linguistics Mathematics Formal models in linguistics Functional and cognitive models in linguistics Computational Linguistics Programming (Python) Analysis of linguistic data: quantitative methods and visualization (taught in English) Mathematical foundations of Computational Linguistics Machine learning Experimental Linguistics Database Ontologies and semantic technologies Digital Humanitarian Technologies: Resources, Tools, Case Studies Designing of linguistic resources and systems
4.	MPhTI Moscow University of Physics and Technology, mipt.ru	Mathematical Foundations of Linguistics Statistical models in linguistics Introduction to fundamental linguistics Typology, comparativistics, areal linguistics Russian corpus grammar Introduction to Computational Linguistics Computer Sociolinguistics Modern syntactic theories Typology of grammatical categories English for professional communication Models and methods of Computational Linguistics Data structures and basic algorithms The main algorithms of linguistic analysis Analysis of oral speech. Corpus linguistics: building and using enclosures Classification methods and machine learning Computer models of discourse Linguistic basis of machine translation Formal models and resources of world languages Linguistic annotation / markup Methods for evaluating AOT systems Computer parsing. Methods of artificial intelligence in Computational Linguistics Application Packages for Linguistic Studies Specialized linguistic databases Linguistic support of the tasks of document analysis Automatic assessment of the complexity of texts

5.	ITMO (St. Petersburg) St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, ifmo.ru	Information Technology: • System analysis and modeling of information processes and systems; • Designing information systems; • Organization of design and development of distributed systems software; • Organization of software design and development for embedded systems; • Software testing; • Quality management software development. Speech technologies: • Digital signal processing; • Digital processing of speech signals; • Mathematical modeling and decision theory; • Pattern recognition; • Recognition and synthesis of speech; • Recognition of the speaker (speaking by voice); • Multimodal Biometric Systems.
6.	University of Oxford http://www.ox.ac.uk	Analysis of functional and structural data images of the brain. Physiological neuroimaging. Brain disorders. Diffusion of the image. Speech and the brain. Visualization. Neurodegeneration. Cognition. Psychiatry
7.	University of California, Los Angeles (UCLA) http://www.ucla.edu	Phonetics. Phonology. Syntax. Semantics. Psycholinguistics. Matlingvistics. Historical linguistics. African, Indian languages.
8.	Harvard University https://www.harvard.edu	Fundamental studies of the speech apparatus and speech functions. Clinical studies of human voice and speech abnormalities. Mechanics, biophysics, physiology and / or molecular biology of the middle and inner ear. Acquired or congenital abnormalities of the mechanisms of hearing. Neurophysiological or modeling approaches in the study of nerve cells and circuits underlying auditory processing. Neurovisual studies of the mechanisms of tinnitus. Cognitive neurobiology of language signal processing. Design, development and improvement of the hardware and software system for hearing aids, ear implants, vestibular prostheses or algorithms for automatic speech recognition.
9.	Cambridge University https://www.cam.ac.uk	Acoustic modeling (statistical models). Fundamental research in machine learning. Optimize dialogue using reinforcement learning. Recognition on large dictionaries. Pattern recognition. Speech recognition on mobile devices. Dictator independence and noise cancellation. Dialog systems and VoiceXML. Statistical language modeling. Statistical machine translation. Processing and transcription of recognized speech
10.	Carnegie Mellon University https://www.cmu.edu	User Interface Software Cognitive models. Speech recognition. Understanding of natural language.

		Computer graphics. Handwriting recognition. Visualization of data, visual design, multimedia. Computer support for teamwork. Computer music and theatrical skill. Social technologies
11.	Johns Hopkins University https://www.jhu.edu	Language modeling. Natural language processing. Neural treatment. Acoustic processing. The theory of optimization. Language Entry

Hence it is clear that, although the educational programs of some universities are named differently, but in terms of their content, they refer to computer linguistics.

4. Purpose and description of the master's degree program

The master's educational program "Computer linguistics" has 3 directions: "Linguistics", "Speech technologies", "Text technologies" (Text processing).

Bachelors-philologists and bachelors-psychologists enter the direction of "Linguistics".

Graduate students with a philological education are necessary for the training of specialists in the engineering of knowledge in the field of linguistics, without the need to study the mathematical foundations of computer science and programming. They will study the methods of composing the thesauri for certain subject areas, mark-up languages for audio and text records for creating text and audio corpora, language models for speech technologies.

In the direction "Speech technologies" and "Text technologies"

Graduate students who graduated from the bachelor's degree in computer science will be trained in two parallel trajectories: speech technologies and word processing technologies, which will provide mathematical and the basis and methods for creating these technologies.

Preparation of masters in the direction of "Linguistics" requires: a deep study of the fundamental foundations of linguistics with an emphasis on the methods of creating operational formal models of the language system, the adequate complexity of such tasks of natural language processing, as recognition and synthesis of speech and text, semantic analysis and understanding of text and speech.

Preparation of masters in the direction of "Speech Technology", requires in-depth study Methods of transcription of sounds and speech, Methods of Speech Recognition, Methods of speech synthesis, Methods of transcription of sounds and speech, Methods of Speech Recognition , Methods of speech synthesis

Preparation of masters in the direction of "Text Technology" requires Methods and tools for creating text corpora

Methods and tools for creating audio corpora, Syntax analysis of texts, Morphological analysis of texts, Semantic analysis of texts

It should be noted that any educational program consists of mandatory disciplines (Mandatory part) and elective disciplines (Variational part).

1. Mandatory part: History and philosophy of science, Foreign language (professional), Pedagogics, Psychology, Software development technology
2. Variational part:
Linguistics: Ontology design tools, Tools for processing visual data, Tools for processing audio data, Tools creating thesauri, Semantic Search Tools.
Speech technologies: Methods of transcription of sounds and speech, Methods of Speech Recognition, Methods of speech synthesis, Methods of transcription of sounds and speech, Methods of Speech Recognition, Methods of speech synthesis.
Text technology: Methods and tools for creating text corpora, Methods and tools for creating audio corpora, Syntax analysis of texts, Morphological analysis of texts, Semantic analysis of texts.
The table below presents the master's educational program "Computer linguistics"
List of disciplines

Table 2 - Semester 1

UE	Objectif	Modules	ECTS	Lectures	TP	TL	W pers.	Total
UE1	History and philosophy of science	Methodology of master's degree students training	3	15	15		60	90
UE2	Foreign language (professional)		3		30		60	90
UE3	Statistical methods in Natural Language Processing	Methods of natural language processing	5	15	30		90	135
UE4	Mathematical Foundations of Computational Linguistics		5	15	30		90	135
	course by choice 1*							
UE5	Tools for creating text corpora	Tools for the creation of language corpora	5	15	30		90	135
UE6	Tools for creating audio corpora		5	15	30		90	135
UE7	1.1 Programming in Python	Languages for symbol processing	5	15	30		90	135
UE8	1.2 Programming in Prolog		5	15	30		90	135
UE9	1.3 Methods of digital processing of speech signals	Digital Signal Processing	5	15	30		90	135
UE10	1.4 Software for processing speech signals		5	15	30		90	135
UE11	Scientific-research work of graduate students (master)		4					120

*- the student has the right to choose two of the 4 courses. Each course is 5ECTS (135 hours)

Conventions:

TP: Practical work

TL: Laboratory work

Pers. work: Independent work (libraries, at home, in practice, etc.)

Table 3. - Semester 2 UE (2 semester = 30 ECTS)

UE	Objectives	Modules	ECTS	Lectures	TP	TL	Pers. work	Total
UE1 2	Pedagogics	Methodology of master's degree students training	3	15	15		60	90
UE1 3	Psychology		3	15	15		60	90
UE1 4	Software development technology		3	15	15		60	90
	Course by choice 2**							
UE1 5	Ontology design tools	Tools for processing natural languages	5	15	30		90	135
UE1 6	Tools for processing visual data		5	15	30		90	135
UE1 7	Tools for processing audio data		3	15	15		60	90
UE1 8	Syntax analysis of texts	Text understanding	5	15	30		90	135
UE1 9	Morphological analysis of texts		5	15	30		90	135
UE2 0	Semantic analysis of texts		3	15	15		60	90
UE2 1	Methods of transcription of sounds and speech	Speech recognition	5	15	30		90	135
UE2 2	Methods of Speech Recognition		5	15	30		90	135
UE2 3	Methods of speech synthesis		3	15	15		60	90
UE2 4	Scientific-research work of graduate students (including scientific internships)		8					240

** - the student has the right to choose three out of 6 courses. Each course - 3 credits (90 hours) or 5 credits (135 hours)

Table 4. - Semester 3 UE (3 semester = 30 ECTS)

UE	Objectives	Modules	ECTS	Lectures	TP	TL	Pers. work	Total
UE25	Specialized linguistic databases	Big Data	5	15	30		90	135

UE26	Data Mining	processing and storing	4	15	30		90	135
	course by choice3***							
UE27	Tools creating thesauri	Search Tools	5	15	30		90	135
UE28	Semantic Search Tools		5	15	30		90	135
UE29	Sentiment analysis of natural language texts	Creating of text corpus	5	15	30		90	135
UE30	Method for processing of text corpora		5	15	30		90	135
UE31	Synthesis of speech analysis of natural language	Creating of audio corpus	5	15	30		90	135
UE32	Methods for processing of audio corpora		5	15	30		90	135
UE33	Scientific-research work of graduate students		8					240
UE34	Teaching practice		3					90

***- the student has the right to choose two of the 4 courses. Each course - 5 credits (135 hours)

Table 5. - Semester4 UE (4semester = 30 ECTS)

UE	Objectives	Modules	ECTS	Lectures	TP	TL	Per s. work	Total
UE35	Scientific-research work of graduate students		8					240
UE36	Research internship		12					360
UE37	Complex exam		3					105
UE38	Writing and defense of Master's degree thesis		7					315

Conclusion

Based on the analysis of questionnaires of employers and educational programs, we defined competencies, a list of disciplines, an ontological model and the educational program on computer linguistics have been built, with three training trajectory.

This educational program can be used not only in the L.N. Gumilyov ENU, but in other universities as well.

References

1. Partners [Электронный ресурс],-2018.-URL:<http://www.comling.enu.kz>.(Дата обращения:18.04.2018).
2. Gruber T.R. Toward Principles for the Design of Ontologies Used for Knowledge Sharing / Gruber T.R. // International Journal Human-Computer Studies. –43, 907-928 (1995)

3. Yergesh B., Mukanova A., Sharipbay A., Bekmanova G., and Razakhova B. Semantic Hyper- graph Based Representation of Nouns in the Kazakh Language. *Computación y Sistemas* Vol. 18, No. 3, 2014 pp. 627–635. DOI: 10.13053/CyS-18-3-2041.
4. Zhetkenbay L., Sharipbay A., Bekmanova G., Khaby lashimuly M., Kamanur U.. These mantical, ontological models and formalization rules Kazakh compound words. *Turklang'14 II International Conference on Computer processing of Turkic Languages*, Istanbul, Turkey, 2014– Istanbul, 2014. – P.107-113.
5. Zhetkenbay L., Sharipbay A.A., Bekmanova G.T., Kamanur U. The ontological model of noun for Kazakh-Turkish machine translation system. *Turklang'15// III International Conference on Computer processing of Turkic Languages*, Russia, Kazan, Tatarstan. – Kazan,2015. –P.15-24.